
Ombú

Lecciones

DE

ARITMÉTICA

ELEMENTAL RAZONADA

EN LAS QUE SE COMPRENDEN TODAS LAS MATERIAS
QUE SOBRE ESTA CIENCIA EXIGE
EL PROGRAMA OFICIAL VIGENTE DE LAS ESCUELAS PÚBLICAS
DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO

POR

ALBERTO R. BERTRÁN

Agrimensor Público, Profesor de Matemáticas del Instituto Melense y ex-Catedrático de esta asignatura en el Ateneo del Uruguay y Colegio Hispano Uruguayo de Montevideo.

Villa de Melo

Tip. y Enc. de EL DEBER CÍVICO--Calle 25 de Mayo núm. 209

1894

Agrimensor Público, Profesor de Matemáticas del Instituto Melense y ex-Catedrático de esta asignatura en el Ateneo del Uruguay y Colegio Hispano Uruguayo de Montevideo.

Villa de Melo

Tip. y Enc. de El Deber Cívico- Calle 25 de Mayo núm. 209

1894

Notas

1ª. Un número encerrado entre paréntesis, así: **(12)**, quiere decir que la materia de que se trata está fundada en lo dicho en el párrafo **12**, el que deberá ser consultado para la mejor comprensión.

2ª. Los párrafos escritos con letra de menos cuerpo, pueden suprimirse después de la primera lectura.

Prólogo

Al terminar en el Instituto Melense el curso preparatorio que se abrió al inaugurarse dicho establecimiento el 24 de Julio próximo pasado, me encontré con una colección de lecciones elementales de aritmètica razonada, preparadas durante los cinco meses escasos que expliqué dicha asignatura en aquel centro de enseñanza.

Teniendo necesidad de repetir el año entrante la explicación de estàs lecciones en el citado Instituto y creyendo que puedan servir también de texto para las Escuelas Públicas de 1º y 2º Grado, puesto que abarcan todo el programa de aritmètica de las expresadas Escuelas, me he decidido á publicarlas, sintiendo, sin embargo, toda la desconfianza propia del que escribe por primera vez y tiene que competir con un gran número de obras de igual naturaleza, tanto nacionales como extranjeras y que circulan con general aceptación.

Decidido, pues, á publicar mi colección de lecciones de aritmética, crei necesario modificar un poco los apuntes que

había tomado de porción de aritméticas españolas y francesas, á fin de que aparezcan lo más originales posibles, tanto en el mètodo, como en la sencillez y claridad en la exposición de cada una de las diferentes teorías que abarcan los principios de Aritmética Elemental.

No he creído conveniente seguir las huellas trazadas por la mayor parte de los autores de Aritméticas Elementales destinadas á la Enseñanza Primaria, por cuanto se proponen inculcar esta ciencia en la mente de los niños de un modo empírico; creo, por el contrario, que desde los primeros pasos que se den en la ciencia de los números, es preciso acostumbrarse á seguir una marcha rigurosamente deductiva, no admitiendo ninguna regla sin que esté plenamente demostrada y lógicamente enlazada con otros principios evidentes ó ya demostrados.

De esta manera no se fatiga la memoria del niño con acumulación de reglas que difícilmente son retenidas por no haber sido préviamente demostradas y comprendidas; luego pues, el estudio de mis lecciónes de Aritmética Elemental Razonada, bajo este plan, será de gran utilidad, tanto para los que no reciban otros conocimientos superiores, como para los que cursen después el estudio de las matemáticas.

No teniendo estas lecciones otro objeto que el de servir de texto á los alumnos de las Escuelas Públicas de 1.º y 2.º Grado, y á los que se preparen para ingresar en la sección de Enseñanza Secundaria, me he ceñido extrictamente al programa oficial para dichas Escuelas y al de examen de ingreso publicado este año por la Universidad de Montevideo, por cuyo motivo no he incluido en estas lecciones la teoría de las potencias, raíces, razones, proporciones, de interés simple y compuesto, de aligación, compañía, etc., por que creo que estas teorías deben estudiarse al cursar el pri-

mer año de Matemáticas, y solo como apéndice explico ligeramente la teoria de los números primos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo; pero en cambio he dado mayor extensión al sistema métrico decimal, presentándolo más completo que cualquier otro autor, pues que, además de su clara y racional exposición, y de las equivalencias de las medidas antiguas de este país, de la Argentina, Brasil è Inglaterra, comparadas con las del nuevo sistema, he calculado las equivalencias de las medidas métricas con las antiguas de los paises expresados, cuyas relaciones son muchas veces necesario conocer, y sobre todo, su conocimiento es indispensable à las personas que se dedican al comercio ó á la industria.

Las operaciones con los números denominados son explicadas con suficiente extensión y claridad, de modo que los estudiantes quedarán habilitados despuès de su estudio, para resolver con facilidad y sin error, cualquier problema numérico de la índole de los que se presentan en el curso de esta obra.

Para la más fácil comprensión de cada teoría, al fin de ella se encuentran porción de ejemplos y problemas resueltos, y algunos ejercicios para resolver, cuyos problemas y ejercicios prácticos, intercalados por toda la obra, sirven de poderoso estímulo para que el estudiante adquiera facilidad en la resolución de los diferentes problemas que puedan presentársele.

La publicación de esta obra tiende á llenar el vacio que se nota por la falta de una Aritmética Elemental Razonada, arreglada á los programas vigentes de Instrucción Primaria. Si estas lecciones consiguen llenar este vacio y merecer favorable acogida por parte de las autoridades escolares y profesores de la República, mis deseos quedarán complacidos,

sin renunciar por esto á correjir todo lo que sea necesario, en otra edición, ya sea por observación propia ó por las que se dignen hacerme los señores profesores que la estudien y hagan uso de ella en sus clases.

Sin más mérito que la aspiración de contribuir con mi grano de arena á la causa de la Instrucción Pública, someto este pequeño trabajo al juicio de las personas competentes en la materia, rogándoles se dignen hacerme las observaciones que juzguen necesarias para el mejor perfeccionamiento de la obra.

Melo, 26 de Diciembre de 1892.

Alberto R. Bertràn.

LECCIONES DE ARITMÉTICA
Elemental Razonada

LECCION I

Nociones preliminares

1. *La Aritmética es la ciencia que enseña á expresar los números, á componerlos y á descomponerlos.*

2. Llámase NÚMERO *á una sola cosa ó á la reunión de varias cosas iguales*, como una manzana, cinco metros, doce libros, cien árboles, etc.

3. Llámase UNIDAD *á cada una de las cosas iguales que componen el número*; por ejemplo: si decimos quince naranjas, la unidad es la naranja; si decimos cincuenta niños, la unidad es el niño.

4. Llámase CANTIDAD *todo lo que se puede re-*

presentar por números exacta ó aproximadamente, como la distancia entre dos puntos, el peso de un objeto cualquiera, el tiempo que está un niño en la escuela, la superficie de un salón, etc.

Generalmente se define la cantidad, diciendo que *es todo lo que es susceptible de aumento ó disminución*, cuya definición la creemos defectuosa, por cuanto abarca mucho más de lo que se quiere definir.—El cariño, el odio, los placeres, los dolores, lo bueno, lo malo, etc., puede aumentar y disminuir, ser más ó menos; sin embargo, ni las afecciones, ni los conceptos morales son comparables á unidad alguna determinada, por consiguiente, no siendo posible apreciar su valor por nùmeros, no pueden ser cantidades, aritméticamente hablando.

5. La cantidad se divide en *continua y discreta ó discontinua.*

Se llama cantidad CONTÍNUA, *la que se compone de partes unidas entre sí*, como la longitud de un camino, la superficie de un terreno.

Se llama cantidad DISCRETA Ó DISCONTÍNUA, *la que se compone de partes que pueden separarse unas de otras sin destruirse*, como cien soldados, diez naranjas, cuatro pesos.

La cantidad contínua es *mensurable*, y la discreta *numerable*; de la primera, se ocupa la *Geometría*, y de la segunda, la *Aritmética*.

6. El número puede ser *entero*, *quebrado* y *mixto*.

NÚMERO ENTERO, *es el que representa una ó varias unidades justas, sin partes de ella*, como seis metros, cuatro pesos, nueve peras, quince horas, cien pizarras, etc.

NÚMERO QUEBRADO *es el que representa una ó varias porciones de la unidad dividida en partes iguales*, por ejemplo: si dividimos una naranja en cuatro partes iguales y de estas tomamos una sola, habremos tomado un cuarto de naranja; si tomamos tres porciones, tendremos tres cuartos de

naranja, cuyos números se representan así: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, y se llaman *quebrados* ó *números fraccionarios*.

Tres cuartos de peso ($\frac{3}{4}$), dos tercios de año ($\frac{2}{3}$), medio metro de paño ($\frac{1}{2}$), etc., son números quebrados ó fraccionarios.

NÚMERO MIXTO, *es el que se compone de entero y quebrado*, como ocho metros y medio, cuyo número se escribe así: $8\frac{1}{2}$: una hora y tres cuartos ($1\frac{3}{4}$); seis pesos y dos tercios ($6\frac{2}{3}$), etc.

7. Los números pueden ser *abstractos* ó *concretos*.

NÚMERO ABSTRACTO, *es el que no determina la especie de la unidad á que se refiere*, como seis, doce, quince, cien, mil, etc.

La unidad en abstracto se llama *uno*.

NÚMERO CONCRETO, *es el que se refiere á una unidad determinada*, como cincuenta naranjas, diez árboles, ocho niños, cien libros, etc.

Los números concretos, pueden ser HOMOGÉNEOS ó HETEROGÉNEOS.—*Son homogéneos, cuando se refieren á unidades de la misma especie,* como seis metros, ocho metros, cien metros; *son heterogéneos, cuando se refieren á unidades de diferentes especies*, como cinco mesas, ocho sillas, treinta manzanas.

También se dividen los números concretos, en *complejos é incomplejos*.

Se llaman COMPLEJOS, *los compuestos de dos ó más concretos de diferente especie, pero de la misma naturaleza*; como nueve arrobas y seis libras; un año, dos meses y cinco días; seis cuadras, treinta varas y dos piés, etc.

Se llaman INCOMPLEJOS, *los concretos que se refieren á una sola especie de unidad*, como nueve pesos; doce metros; cinco arrobas; etc.

La Aritmética se divide en dos partes principales: NUMERACIÓN y CÁLCULO.

8. La NUMERACIÓN, *es la parte de la Aritmética que enseña á formar y expresar los números.*

EL CÁLCULO, *es la parte de la Aritmética que enseña á hacer ciertas operaciones con los números, de modo que se obtengan resultados más rápidos que por medio de la numeración.*

Las operaciones fundamentales que abraza el cálculo aritmético, son las siguientes: *adición, sustracción, multiplicación* y *división*; las de *adición* y *multiplicación* se llaman operaciones de *composición*; y las de *sustracción* y *división*, se llaman de *descomposición*, por ser inversas de las anteriores.

LECCIÓN II

Numeración

9. Hemos dicho que la NUMERACIÓN *es la parte de la Aritmética que enseña á expresar los números*, y como estos pueden expresarse de palabra ó por escrito, la numeración puede ser también *hablada* ó *escrita*.

Numeración hablada

10. LA NUMERACIÓN HABLADA, *tiene por objeto formar los números y expresarlos con muy pocas palabras.*

11. Llámase SISTEMA de numeración hablada, *al conjunto de convenciones que se han hecho para formar los números* y *darles nombre.*

12. Ya se ha dicho (**7**) que *la unidad en abstracto se llama uno*, y en el sistema de numeración hablada que vamos á explicar, se ha convenido que la reunión de uno y uno, se exprese con

la palabra *dos*; la reunión de dos y uno, con la palabra *tres*; la de tres y uno, con la palabra *cuatro*; la de cuatro y uno, con la palabra *cinco*; la de cinco y uno, con la palabra *seis*; la de seis y uno, con la palabra *siete*; la de siete y uno, con la palabra *ocho*; la de ocho y uno, con la palabra *nueve*; y, por último, la reunión de nueve unidades y una más, se exprese con la palabra *diez*.

13. La reunión de diez unidades, se considera como una nueva unidad, llamada *decena*, y se cuenta por decenas del mismo modo que se contó por unidades, - y así se dice: *una decena, dos decenas, tres decenas, cuatro decenas, cinco decenas, seis decenas, siete decenas, ocho decenas, nueve decenas, diez decenas.*

El uso sustituyó la nomenclatura anterior, por la siguiente:

En vez de una decena, se dice *diez*; en vez de dos decenas, *veinte*; en vez de tres decenas, *treinta*; en vez de cuatro decenas, *cuarenta*; de cinco decenas, *cincuenta*; de seis decenas, *sesenta*; de siete decenas, *setenta*; de ocho decenas, *ochenta*; de nueve decenas, *noventa*; y, en vez de diez decenas, se dice *cien*.

Para expresar los números comprendidos entre las decenas, se agregan á los nombres de estas los de los nueve primeros números. Así, por ejemplo, agregando á la palabra diez los nombres de los nueve primeros números, formaremos los nombres de los números comprendidos entre diez y veinte,—los cuales son: diez y uno, ú *once*, diez y dos ó *doce*, diez y tres ó *trece*, diez y cuatro ó *catorce*, diez y cinco ó *quince*, *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*, *diez y nueve* y veinte.

Agregando á la palabra *sesenta* los nombres de los nueve primeros números, formaremos los nombres de los números comprendidos entre sesenta y setenta, los cuales son: *sesenta y uno*, *sesenta y*

dos, sesenta y tres, sesenta y cuatro, sesenta y cinco, sesenta y seis, sesenta y siete, sesenta y ocho, sesenta y nueve, y setenta.

Del mismo modo agregaríamos los nombres de los nueve primeros números á los nombres de las demás decenas para formar todos los números comprendidos entre uno y cien.

14. La reunión de diez decenas, se considera como una nueva unidad, llamada *centena*, y se cuenta por centenas hasta diez centenas, del mismo modo que se cuenta por unidades hasta diez, así diremos: una centena ó *cien*, dos centenas ó *doscientos*, tres centenas ó *trecientos*, cuatro centenas ó *cuatrocientos*, cinco centenas ó *quinientos*, seis centenas ó *seiscientos*, siete centenas ó *setecientos*, ocho centenas ú *ochocientos*, nueve centenas ó *novecientos*, diez centenas ó *mil*.

Para expresar los números comprendidos entre dos centenas consecutivas, se agregan á los nombres de estas los nombres de los noventa y nueve primeros números.

Por ejemplo, si queremos expresar los nombres de los números comprendidos entre *quinientos* y *seiscientos*, á la palabra quinientos le agregaremos el nombre de cada uno de los primeros noventa y nueve números, y formaremos los siguientes: *quinientos uno, quinientos dos, quinientos tres, quinientos cuatro, quinientos cinco* . . . . *quinientos cuarenta, quinientos cuarenta y uno, quinientos cuarenta y dos, quinientos cuarenta y tres* . . . . *quinientos noventa y siete, quinientos noventa y ocho, quinientos noventa y nueve, seiscientos.*

Del mismo modo se forman los demás números comprendidos entre las otras centenas, así pues, ya podemos expresar todos los números comprendidos entre uno y mil.

15. La reunión de mil unidades, se considera como una nueva unidad de SEGUNDA CLASE, llamada *millar*, y se cuenta por unidades, decenas y centenas de millar, hasta mil millares, del mismo modo que se cuenta por unidades, decenas y centenas *simples*. desde uno hasta mil, así se dice: un millar, ó simplemente *mil*, *dos mil*, *tres mil*, *cuatro mil*, *cinco mil*, *seis mil* . . . . *setenta mil*, *setenta y un mil*, *setenta y dos mil*, *setenta y tres mil*, *setenta y cuatro mil*. . . . . *novecientos noventa y siete mil*. *novecientos noventa y ocho mil*, *novecientos noventa y nueve mil.*

Para expresar los números comprendidos entre dos millares consecutivos, se agregan á los nombres de los millares los de los novecientos noventa y nueve primeros números, por ejemplo: agregando á las palabras *trescientos ochenta y siete mil*. los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números, formaremos todos los comprendidos entre trescientos ochenta y siete mil y trescientos ochenta y ocho mil, los cuales son: *trescientos ochenta y siete mil uno*, *tres cientos ochenta y siete mil dos*, *trescientos ochenta y siete mil tres*, *trescientos ochenta y siete mil cua tro* . . . . *trescientos ochenta y siete mil treinta*, *trescientos ochenta y siete mil treinta y uno*, *trescientos ochenta y siete mil treinta y dos*, *trescientos ochenta y siete mil treinta y tres* . . . . *trescientos ochenta y siete mil seis cientos noventa y ocho*, *trescientos ochenta y siete mil seiscientos noventa y nueve*, *trescientos ochenta y siete mil setecientos* . . . . *trescientos ochenta y siete mil novecientos noventa y siete*, *trescientos ochenta y siete mil novecientos noventa y ocho*, *trescientos ochenta y siete mil no-*

vecientos noventa y nueve, trescientos ochenta y ocho mil.

Del mismo modo se forman los demás millares.

Por este método, pues, podremos expresar todos los números comprendidos entre una unidad y mil millares de unidades.

16. La reunión de mil millares se considera como una nueva unidad principal de TERCERA CLASE llamada *millón*, y se cuenta por unidades, decenas y centenas de millón, lo mismo que se cuenta por unidades, decenas y centenas simples hasta mil, así diremos *un millón, dos millones, tres millones* . . . . *veinte millones, treinta millones* . . . . *cien millones, quinientos millones* . . . . *novecientos noventa y ocho millones, novecientos noventa y nueve millones, mil millones*.

La reunión de mil millones, se considera como una nueva unidad de CUARTA CLASE, llamada *unidad de millar de millón*, y se cuenta por unidades de millar de millón, decenas de millar de millón y centenas de millar de millón, lo mismo que se cuenta por unidades, decenas y centenas simples; así decimos, una unidad de millar de millón ó simplemente, *un millar de millón*, mejor aun, *mil millones, dos mil millones, tres mil millones, cuatro mil millones* . . . . *veinte, treinta, cuarenta* . . . . *noventa mil millones* . . . . *setecientos, ochocientos, novecientos, mil millones* . . . . *novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones*.

Los números comprendidos entre dos millones consecutivos, se forman agregando á las palabras que expresan los millones, los nombres de los novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve primeros números; de ese modo tendremos formados todos los números desde la uni-

dad simple ó uno hasta un millón de millones.

17. A un millón de millones, se llama *billón*; á un millón de billones, se le llama *trillón;* á un millón de trillones, *cuatrillón*, y así sucesivamente. (1)

Los billones, trillones, etc. se cuentan lo mismo que los millones.

18. La serie de los números es infinita; por que por grande que sea el número que nos imaginemos, se podrá formar otro mayor agregándole una unidad más.

19. Obsérvase en el curso de los párrafos anteriores, que con estas pocas palabras: *uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, veinte. treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, cien, mil, millón, billón, trillón, cuatrillón*, etc. se puede expresar cualquier número por grande que sea.

20. A los nueve primeros números, se les da el nombre de unidades de *primer orden*; á las decenas, se les llama unidades de *segundo orden*; á las centenas, de *tercer orden*; á las unidades, decenas y centenas simples consideradas en conjunto, se les llama también unidades de PRIMERA CLASE.

Ya hemos visto (**15**) que los millares se consideran como nuevas unidades llamadas de *segunda clase* y que tienen también unidades, decenas y centenas como las unidades simples, las que respectivamente toman el nombre de unidades de *cuarto, quinto y sexto orden*.

Del mismo modo hemos visto (**16.**) que las unidades de millón se consideran como una unidad principal llamada de *tercera clase* y que se

(1) Los franceses llaman BILLONES á las unidades de millar de millón. TRILLONES á las unidades de billón, y así sucesivamente.

cuentan los millones por unidades, decenas y centenas, á las que se les dan respectivamente los nombres de unidades de *séptimo*, *octavo* y *noveno orden*.

A las unidades de millar de millón, se les llama unidades de *cuarta clase* y se cuentan también por unidades, decenas y centenas de millar de millón, las cuales toman el nombre de unidades de *décimo*, *undécimo* y *duodécimo orden*.

A los billones, se les llama unidades de *quinta clase*; á las unidades de millar de billón, de *sexta clase*, y así sucesivamente, dividiéndose cada clase en unidades, decenas y centenas: es decir pues, que la reunión de tres especies de unidades, forma siempre una *clase* de unidades, llamada en general *clase ternaria*.

21. En resúmen, el sistema de numeración hablada quo acabamos de exponer, se funda en la convención principal que se ha hecho de que *diez unidades de un orden cualquiera, componen una del orden inmediato superior*.

Por ejemplo, hemos visto que diez unidades simples forman una decena, diez decenas una centena, diez centenas forman un millar,. y así sucesivamente.

22 Según este convenio *diez* es la *base* de nuestro sistema de numeración, por cuya razón se llama *sistema decimal* y es el que han adoptado todos los paises civilizados.

21 Si la *base del sistema* fuese dos, es decir, si dos unidades de un orden formasen una del orden inmediato superior, el sistema se llamaría *binario*: si tres, *ternario*:. . . . . si doce *duodecimal* etc. Con cualquiera de estos sistemas podríamos expresar también todos los números.

La idea de esta generalización, se debe al profesor de

Ginebra Weigel, que en 1687 publicó una Aritmética usando solo los números uno, dos y tres.

Algunos creen que esta obra fué iniciada por Pitágoras.

24 El sistema de numeración decimal hace próximamente mil años que fué introducido en Europa por los árabes, y probablemente tiene su orígen en la configuración de la mano, pues se cree que al principio los hombres contaron con los dedos; y quizá también la división de cada dedo en tres falanjes diò la idea de los tres órdenes, unidades, decenas y centenas, de que está compuesta cada clase de unidades de nuestro sistema de numeración decimal.

LECCIÒN III

Numeración escrita

25. La numeración escrita tiene por objeto *representar con pocos signos todos los números.*

Los signos, cifras ó guarismos, que se ha convenido emplear para representar los números en el sistema de numeración decimal, son los siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve	cero	(*)

La última cifra llamada *cero*, es símbolo de la *nada*, porque *nada* expresa por sí misma, por lo que se le llama *cifra no significativa.*

(*) Estas cifras se llaman aràbigas por haberlas hecho conocer en Eucopa los árabes españoles en el siglo X; sin embargo, no fueron generalmenrt aceptadas hasta el siglo XVI.

Las palabras *uno, dos, tres, etc.,* expresan en castellano los nombres de los números: las cifras 1, 2, 3, etc., representan gráficamente el valor de los números, cuyos signos son comprendidos por todos los pueblos que han adoptado este sistema de numeración; mientras que las palabras que hemos empleado para expresarlos solo son comprendidas por los que hablan el idioma castellano.

26 El sistema de numeración está fundado en las dos convenciones siguientes:

1.ª Toda cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades del orden inmediato superior.

2.ª La cifra cero sirve para ocupar los lugares de los diversos órdenes de unidades que falten en el número.

Por ejemplo, para representar el número diez y seis, que se compone de una decena y seis unidades simples, se escribe asi, 16, de manera que la cifra 1 que representa las decenas ó unidades de segundo orden, quede á la izquierda de la cifra 6, que representa las unidades simples ó de primer orden.

Del mismo modo veremos que el número treinta y cinco, que se compone de tres decenas ó unidades de segundo orden y cinco unidades simples ó de primer orden, se escribe 35.

El número sesenta, que se compone solo de seis decenas ó unidades de segundo orden, se escribe 60, colocando un cero en el lugar de las unidades de primer orden de que carece el número dado.

El número ochocientos cincuenta y cuatro, que se compone de ocho centenas ó unidades de tercer orden, de cinco decenas ó unidades de segundo orden, y de cuatro unidades simples ó de primer orden, se escribirá 854, de modo que el 8 quede escrito á la izquierda del 5, porque representa unidades del orden inmediato superior á las que representa dicha cifra 5, así como esta ha

quedado á la izquierda del 4, porque también representa unidades del orden inmediato superior á las que representa el expresado 4, quedando escrito el número dado, de acuerdo con la 1.ª convención hecha en este sistema de numeración.

El número ocho mil treinta y nueve, que se compone de ocho unidades de millar ó de cuarto orden, tres decenas ó unidades de segundo orden y nueve unidades simples ó de primer orden se escribe 8039, colocándose un cero en el lugar de las centenas ó unidades de tercer orden que faltan en el número propuesto, todo de acuerdo con las convenciones 1ª. y 2ª. ya citadas.

El número diez mil cinco, se escribe 10005, ocupando con ceros los lugares de las unidades de cuarto, tercero y segundo orden de que carece el número dado.

Así el número trescientos cinco millones cuatro mil doscientos uno, se escribirá 305004201.

27. Obsérvase en los ejemplos anteriores que cada cifra, empezando por la de las unidades simples, ocupa el mismo lugar que el orden de unidades que ella representa; por ejemplo, las decenas ó unidades de segundo orden, ocupan siempre el segundo lugar, las centenas ó unidades de tercer orden, el tercer lugar, las unidades de millar el cuarto, las decenas de millar, el quinto y así sucesivamente.

28. Regla general.—*Para escribir un número entero, se escriben de izquierda á derecha las cifras qne expresan las unidades de cada orden, unas al lado de las otras, principiando por la de orden superior y cuidando de ocupar con ceros los lugares donde falten unidades de algún orden.*

Para escribir el número ocho mil doscientos siete, que se compone de 8 unidades de millar ó

de cuarto orden, 2 centenas ó unidades de tercer orden, 0 decenas ó unidades de segundo orden y 7 unidades simples ó de primer orden, colocaremos las cifras 8, 2, 0 y 7 que expresan las unidades que hay de cada orden, unas al lado de las otras, así: 8207; que como se vé, el cero ocupa el lugar de las decenas que faltan en el número propuesto.

Para escribir el número veinte mil ocho, que se compone de dos unidades de quinto orden y ocho de primer orden, faltando las unidades de cuarto, tercero y segundo orden, se escribirá 20008, ocupando con tres ceros los tres órdenes de unidades que faltan.

De la misma manera escribiremos novecientos cuatro mil diez y ocho, 904018. Un millón trescientos cincuenta y seis mil cuatrocientos veinticinco, 1356425. Tres millones cinco mil ocho. 3005008. Quince billones diez mil millones ochocientos cinco, 15010000000805.

29. Reasumiendo cuanto hemos expuesto en esta lección, observamos:

1.º Que cada cifra tiene dos valores: uno *absoluto* que expresa el número de unidades que representa, y otro *relativo* que depende del orden á que pertenecen estas unidades, cuyo valor está en relación con la posición que ocupa la cifra en el número.

Por ejemplo: en el número 462 que consta de cuatro centenas, 6 decenas y 2 unidades, el valor *absoluto* de la cifra de las centenas es 4 y su valor *relativo*, es *4 centenas*.

2º. Cada orden de unidades ocupa siempre el mismo lugar en todos los números. (**27**).

3º. El valor de un número no se altera aunque se coloquen uno ó varios ceros á su izquierda:

porque con esto no se altera el lugar que ocupan las otras cifras y contándose como se cuentan los órdenes de derecha á izquierda, conservará cada cifra su mismo valor relativo, no alterándose por consiguiente el número.

Por ejemplo, el número 43005, es igual á 00043005.

4°. Cada unidad de un orden cualquiera sabemos que vale diez unidades del orden inmediato inferior, así pues, cada cifra de un número cualquiera representa unidades diez veces mayores que su inmediata de la derecha, y por tanto: ***un número se hace diez, cien, mil, etc., veces mayor, colocándole uno, dos, tres, etc., ceros á su derecha***; porque las unidades que representa cada cifra se hacen diez, cien, mil, etc., veces, mayores ocupando los lugares correspondientes á unidades de uno, dos, tres, etc., órdenes superiores.

Recíprocamente: ***un número terminado en ceros se hace diez, cien, mil, etc., veces menor suprimiéndole uno, dos, tres etc.: ceros á su derecha:*** porque al suprimir esos ceros, las cifras que antes ocupaban el segundo, tercero ó cuarto lugar, ocupan después de suprimidos los ceros, el primer lugar de la derecha, ó sea el de las unidades; por consiguiente, el número se hace diez, cien, mil, etc., veces menor suprimiéndole uno, dos ó tres ceros de su derecha.

Por ejemplo: sea el número 4895. Agregándole tres ceros á su derecha, se obtendrá el número 4895000, en el cual observamos que la cifra 5, que en el primer número representa solo unidades simples, ocupa, en el segundo, el lugar de las unidades de millar, luego representa unidades mil veces mayores: la cifra 9 que en el primer número representa solo decenas simples, en el segundo, expresa decenas de millar, así pues, representa también unidades mil veces mayores; de la

misma manera vemos que cada una de las demás cifras del segundo número representa unidades mil veces mayores que las que expresan las mismas cifras en el primero; queda, pues, demostrado que cada cifra del segundo número representa unidades mil veces mayores que en el primero, y como es evidente que, *lo que se hace con las partes queda hecho con el todo,* resulta que el segundo número es mil veces mayor que el primero.

Por medio de un raciocinio parecido al que acabamos de emplear, demostraríamos que suprimiéndole al número 35200 los dos ceros de la derecha, se hace dicho número cien veces menor.

30. *Para leer un número entero escrito en cifras, se lee dando á cada una el valor absoluto y relativo que tiene, empezando la lectura por la izquierda,* y si se compone de muchas cifras se facilita su lectura dividiéndole en secciones de tres cifras cada una, empezando por la derecha ó sea por las unidades simples. En la primera separación se pone un punto, en la segunda un 1 pequeño, en la tercera otro punto, en la cuarta un 2 pequeño, en la quinta otro punto, etc., y luego se leen aisladamente cada uno de estos grupos, empezando por el de la izquierda, pronunciando mil donde se halle un punto y millón, billón, etc., donde se hallen los pequeños números 1, 2, 3, etc., que se colocaron al dividir el número propuesto en grupos.

Por ejemplo: para leer el número

$$86.405_2890.643_1215.002$$

Empiezo por dividirlo en periodos de tres cifras, principiando por la derecha y digo: unidad, decena y centena, *punto*; unidad de millar, decena de millar, centena de millar, *uno:* unidad de millón, decena de millón, centena de millón, *pun-*

to; unidad de millar de millón, decena de millar de millón, centena de millar de millón, *dos:* y así sucesivamente.

Hecha la división en períodos de tres cifras del modo indicado, se lee el número empezando por la izquierda, de este modo:

86 mil, 405 billones, 890 mil, 643 millones, 215 mil, 2 unidades.

Del mismo modo leeremos el número

$$733_3640.054_2960.000_1042.001$$

Diciendo 733 trillones, 640 mil 54 billones, 960 mil millones, 42 mil, uno.

En la práctica generalmente no se pasa de las centenas de trillón.

31. Cuadro para facilitar á los principiantes la escritura y lectura de los números.

				CLASE DE UNIDADES PRINCIPALES
4	centenas	de trillón	ó sean de 21.º orden	7.ª
8	decenas		ó sean de 20.º ornen	
6₃	unidades		ó sean de 19.º orden	
0	centenas	de millar de billón	ó sean de 18.º orden	6.ª
0	decenas		ó sean de 17.º orden	
3.	unidades		ó sean de 16.º orden	
5	centenas	de billón	ó sean de 15.º orden	5.ª
4	decenas		ó sean de 14.º orden	
0₂	unidades		ó sean de 13.º orden	
0	centenas	de millar de millón	ó sean de 12.º orden	4.ª
2	decenas		ó sean de 11.º orden	
9.	unidades		ó sean de 10.º orden	
8	centenas	de millón	ó sean de 9.º orden	3.ª
0	decenas		ó sean de 8.º orden	
3₁	unidades		ó sean de 7.º orden	
1	centenas	de millar	ó sean de 6.º orden	2.ª
0	decenas		ó sean de 5.º orden	
5.	unidades		ó sean de 4.º orden	
0	centenas	simples	ó sean de 3.er orden	1.ª
2	decenas		ó sean de 2.º orden	
7	unidades		ó sean de 1.er orden	

Se leerá: cuatro cientos ochenta y seis trillones, tres mil quinientos cuarenta billones, veintinueve mil ochocientos tres millones, ciento cinco mil, veintisiete unidades.

LECCIÓN IV

Numeración Romana

32. Para expresar los números, los Romanos se valían de las siete letras que á continuación se representan con los valores numéricos que tienen.

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.
1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.

Muy antiguamente expresaban mil con dos C colocadas en sentido opuesto una de otra, y una I en medio, así: CIↃ.

33. La numeración Romana está fundada en los siguientes convenios:

1.º *Repitiendo una letra se repite su valor.*

Por ejemplo II representa dos unidades; XXX, representa treinta; CCC, trescientos.

2.º *Ninguna letra se repite cuatro veces seguidas.*

3.º *Toda letra colocada á la derecha de otra de igual ó mayor valor numérico, aumenta el valor de aquella en la cantidad que esta representa.*

Por ejemplo: VI representa seis unidades, porque la V vale cinco y la I una, y colocada esta

á la derecha de la V, le aumenta su valor y forman seis.

Otro: LX, representa sesenta, porque la L vale cincuenta y la X diez, que colocada á la derecha de la L le aumenta su valor y forman sesenta.

Del mismo modo demostraríamos que MD representa 1500, y CC 200.

4.° *Toda letra colocada á la izquierda de otra que represente mayor valor numérico, disminuye el valor de esta en la cantidad que aquella expresa.*

Por ejemplo: IV representa cuatro unidades, porque la V vale cinco, y la I una, que colocada à la izquierda de la V, le disminuye su valor y forman el número cuatro.

Del mismo modo demostraríamos que CD representa 400, y CM, novecientos.

5.° *Las letras que representan unidades simples, sirven también para representar millares, colocándoles una linea horizontal encima, ó una m en la parte superior ó inferior de las mismas.*

Por ejemplo: V representa cinco unidades simples y con una rayita horizontal encima, así $\overline{V}$, representa cinco mil, ó bien V_m y V^m también representan cinco mil.

Del mismo modo vemos que X representa solo diez unidades y con una rayita horizontal por encima $\overline{X}$ representa diez mil; así como M que solo representa mil unidades, con la rayita horizontal $\overline{M}$, representa un millón etc.

34. Ejemplos de varios números escritos por el sistema decimal y sus equivalentes en el de numeración Romana:

1	I	30	XXX
2	II	38	XXXVIII
3	III	59	LIX
4	IV	80	LXXX
5	**V**	**90**	**XC**
6	VI	99	IC
7	VII	250	CCL
8	VIII	400	CD
9	IX	950	LM
10	X	1600	MDC
11	XI	1853	MDCCCLIII
12	XII	1892	MDCCCXCII
13	XIII	20715	$\overline{\text{XX}}$DCCXV
14	XIV	480512	$\overline{\text{CDLXXX}}$DXII
15	XV	2000000	$\overline{\text{MM}}$
16	XVI	1350412	MCCCLCDXII
25	XXV	1006240	$\overline{\text{MVI}}$CCXL

35. Obsérvase que la numeración Romana no tiene un signo correspondiente al cero de la numeración decimal escrita, por lo que es algo más difícil la escritura de estos números cuando representan cantidades muy grandes, y sobre todo muy complicados los cálculos que con ellos se hacían.

Hoy solo se usan estas cifras para representar los números de orden.

CÀLCULO ARITMÉTICO

OPERACIONES FUNDAMENTALES

LECCIÒN V

Adición de los números enteros

36. ADICIÓN *es una operaciòn que tiene por objeto reunir las unidades que contienen dos ó màs números dados, en uno solo.*

Los nùmeros dados se llaman *sumandos,* y el resultado ó número que se busca se llama *suma.*

37. Para indicar la adición se hace uso de este signo + que se llama *màs,* el cual se coloca entre los números que se quieren sumar.

Por ejemplo: si queremos sumar el uúmero 9 con el 5, lo indicaremos así: 9+5, y se lee nueve *màs* cinco.

Para hallar la suma indicada en el parrafo anterior, de 9+5, no hay más que agregar al número 9 una á una las unidades de que está compuesto el 5, y como el 5 se compone de 1+1+1+1+1 unidades, diremos 9+1 son 10, (**12**) 10+1 son 11, 11+1 son 12, 12+1 son 13, 13+1 son 14; tenemos pues que 9+5 son 14.

Para sumar los números 5, 7, 6 y 8, empezaremos por agregar al número 5 todas las unidades que componen el sumando 7 como hemos hecho, en el ejemplo anterior y hallaremos que forman 12; à la suma 12, que se compone de las unidades que forman los sumandos 5 y 7, le agregaremos una á una todas las unidades del 6 y hallaremos

la suma 18, y á la suma 18, que se compone de las unidades de los sumandos 5, 7 y 6, le agregaremos de la misma manera las unidades del sumando 8: de este modo hallaremos que la suma de los números propuestos es 26: luego, 5+7+6+8=26.

El signo=, que acabamos de emplear, se llama *igualdad*, y se usa para indicar que una cantidad es igual á otra. (1)

38. *Para sumar un número entero con otro ú otros de una sola cifra, basta agregar al pirmero las unidades del segundo; á la suma del primero y segundo, las unidades del tercero; á la suma del primero, segundo y tercero, las unidades del cuarto. y asi sucesivamente hasta agregar las unidades del último sumando.*

Este procedimiento es sencillo pero muy lento; asi pues, para ejecutar rápidamente la adición de varios números dígitos debe aprenderse de memoria la siguiente:

TABLA DE SUMAR

1	y	1	son	2	2	y	1	son	3
1	y	5	»	6	2	y	4	»	6
1	y	3	»	4	2	y	7	»	9
1	y	6	»	7	2	y	3	»	5
1	y	4	»	5	2	y	5	»	7
1	y	7	»	8	2	y	9	»	11
1	y	2	»	3	2	y	6	»	8
1	y	10	»	11	2	y	10	»	12
1	y	8	»	9	2	y	8	»	10
1	y	9	»	10	2	y	2	»	4

(1) En toda igualdad, se llama PRIMER MIEMBRO, á la cantidad que está á la izquierdá, d el signo =. y SEGUNDO MIEMBRO, á la que está á la derecha.

3	y	3	son	6
3	y	1	»	4
3	y	4	»	7
3	y	2	»	5
3	y	9	»	12
3	y	5	»	8
3	y	8	»	11
3	y	7	»	10
3	y	10	»	13
3	y	6	»	9

—

4	y	1	son	5
4	y	4	»	8
4	y	2	»	6
4	y	5	»	9
4	y	3	»	7
4	y	6	»	10
4	y	9	»	13
4	y	8	»	12
4	y	10	»	14
4	y	7	»	11

—

5	y	3	son	8
5	y	9	»	14
5	y	1	»	6
5	y	2	»	7
5	y	8	»	13
5	y	4	»	9
5	y	5	»	10
5	y	6	»	11
5	y	10	»	15
5	y	7	»	12

6	y	1	son	7
6	y	2	»	8
6	y	3	»	9
6	y	6	»	12
6	y	9	»	15
6	y	8	»	14
6	y	10	»	16
6	y	7	»	13
6	y	4	»	10
6	y	5	»	11

—

7	y	4	son	11
7	y	6	»	13
7	y	3	»	10
7	y	1	»	8
7	y	2	»	9
7	y	5	»	12
7	y	10	»	17
7	y	8	»	15
7	y	7	»	14
7	y	9	»	16

—

8	y	2	son	10
8	y	4	»	12
8	y	1	»	9
8	y	9	»	17
8	y	6	»	14
8	y	3	»	11
8	y	10	»	18
8	y	5	»	13
8	y	8	»	16
8	y	7	»	15

9	y	8	son	17
9	y	6	»	15
9	y	4	»	13
9	y	7	»	16
9	y	10	»	19
9	y	1	»	10
9	y	5	»	14
9	y	3	»	12
9	y	2	»	11
9	y	9	»	18

—

10	y	2	son	12
10	y	4	»	14
10	y	3	»	13
10	y	1	»	11
10	y	5	»	15
10	y	9	»	19
10	y	8	»	18
10	y	6	»	16
10	y	7	»	17
10	y	10	»	20

—

11	y	2	son	13
11	y	4	»	15
11	y	10	»	21
11	y	9	»	20
11	y	5	»	16
11	y	3	»	14
11	y	7	»	18
11	y	8	»	19
11	y	6	»	17
11	y	1	»	12

12	y	1	son	13
12	y	4	»	16
12	y	9	»	21
12	y	2	»	14
12	y	7	»	19
12	y	6	»	18
12	y	3	»	15
12	y	5	»	17
12	y	8	»	20
12	y	10	»	22

—

13	y	3	son	16
13	y	4	»	17
13	y	5	»	18
13	y	1	»	14
13	y	6	»	19
13	y	2	»	15
13	y	9	»	22
13	y	7	»	20
13	y	10	»	23
13	y	8	»	21

—

14	y	1	son	15
14	y	3	»	17
14	y	2	»	16
14	y	4	»	18
14	y	9	»	23
14	y	8	»	22
14	y	10	»	24
14	y	7	»	21
14	y	6	»	20
14	y	5	»	19

15	y	1	son	16	16	y	1	son	17
15	y	6	»	21	16	y	3	»	19
15	y	3	»	18	16	y	2	»	18
15	y	5	»	20	16	y	5	»	21
15	y	2	»	17	16	y	4	»	20
15	y	8	»	23	16	y	9	»	25
15	y	4	»	19	16	y	6	»	22
15	y	7	»	22	16	y	10	»	26
15	y	9	»	24	16	y	7	»	23
15	y	10	»	25	16	y	8	»	24

Aprendida de memoria la precedente tabla, con un poco de estudio y repetidos ejercicios, fácil é insensiblemente se aprenden los resultados de la adición de una cifra á un número cualquiera; asi en la práctica para ejecutar la suma de 19 + 8, decimos de una vez, son 27, sin necesidad de adicionar una á una las unidades de que se compone el 8; del mismo modo decimos que 75 y 6 son 81, 187 y 9 son 196 etc.

39. Si tuviésemos que practicar la adición de varios números compuestos, procederiamos por partes, sumando primero las cifras que representan unidades simples, despues las de las decenas, luego las de las centenas y así sucesivamente, formando con las sumas parciales de las unidades, decenas, centenas, etc., un número compuesto que representará evidentemente la verdadera adición de los sumandos dados.

Sea por ejemplo adicionar los siguientes números: 236 + 548 + 74 + 5, empezaremos por sumar las cifras de las unidades simples de este modo: 6 y 8 son 14; 14 y 4 son 18; 18 y 5 son 23 unidades; la suma de las decenas se obtienen asi: 3 y 4 son 7 y 7 son 14 decenas; las centenas son 2 y 5, 7 centenas: de modo que la suma total se compone de 23 unidades, 14 decenas y 7 centenas; pero en las 23 unidades hay 2 de-

cenas que pueden agregarse á la suma de las 14 que contienen los sumandos dados y formarán 16 decenas, sobrando 3 unidades que son las del número que pretendemos formar con los propuestos; en las 16 decenas halladas, hay una centena que puede agregarse á las 7 que contienen los sumandos y formaremos 8 centenas, sobrando 6 decenas que son las del número que tratamos de formar por último pues, vemos que la suma total que buscamos se compone de 8 centenas, 6 decenas y 3 unidades ó sea de 863 unidades.

Para facilitar la operación pueden disponerse los sumandos en columna, de modo que las unidades de un mismo orden se correspondan, tirándose una línea horizontal por debajo de todos ellos para separarlos de la suma total que se escribe al pié.

Los sumandos del ejemplo anterior, se colocarán así:

$$\left.\begin{array}{r} 236 \\ 548 \\ 74 \\ 5 \end{array}\right\} \text{Sumandos}$$
$$\overline{863} \text{ suma total}$$

Para efectuar la suma diremos, 6 y 8, 14; 14 y 4, 18; 18 y 5, 23; la suma de las unidades son 23, en las cuales hay 2 decenas y 3 unidades; escribimos las 3 unidades debajo de la columna correspondiente y las dos decenas las reservaremos para sumarlas con las otras de los sumandos, así: 2 que llevamos y 3 son 5 y 4, 9 y 7 forman 16 decenas, en las que hay una centena y sobran 6 decenas que escribimos debajo de la columna correspondiente, reservando la centena para agregarla á las otras de los sumandos, así: 1 que llevamos y 2 son 3 y 5 son 8 centenas que escri-

bimos debajo de la columna de ellas, quedando formado el número 863 que representa la suma de los números propuestos, porque está compuesto de todas las unidades de los sumandos dados.

40. El procedimiento empleado en el ejemplo anterior, puede aplicarse á otro cualquier caso, por consiguiente podemos establecer la siguiente regla general.

Para sumar números enteros, se escriben, unos debajo de los otros, todos los números dados, de modo que las cifras de igual orden se correspondan. Se suma primeramente la columna de las unidades simples y si esta suma contiene una ó más centenas, se reservan para agregarlas á la suma de la columna de las decenas, y solo se escriben las unidades que sobran. Se suman las decenas, y, si esa suma contiene una ó más centenas, se reservan para agregarlas á la suma de la columna de las centenas, y solo se escriben las decenas que sobran, y así se continúa snmando todos los demás órdenes de unidades que hubiese hasta la última columna de la izquierda.

Propongámonos por ejemplo sumar los números, 82456, 973, 91480 y 65. Colocaremos todos los sumandos unos debajo de otros, de modo que las unidades de cada orden queden en una misma columna, y después de tirar una raya por la parte inferior, practicaremos la operación como á continuación se expresa.

82456	Sumandos
973	
91480	
65	
174974	Suma

Diremos: 6 unidades y 3 son 9, y 0, 9 y 5, 14 que componen 1 decena y 4 unidades; las 4 unidades las escribimos debajo de la columna correspondiente y la decena la reservamos para añadirla á la columna de las decenas. Las decenas se suman así: 1 que llevamos y 5 son 6 y 7, 13 y 8, 21 y 6, 27; en 27 decenas hay 2 centenas y 7 decenas, escribimos 7 debajo de la columna de las decenas y reservamos las 2 centenas para añadirlas á la suma parcial de la columna de las centenas. Se suman ahora las cifras de la columna de las centenas de este modo: 2 que llevamos y 4 son 6 y 9, 15 y 4 son 19 centenas en las cuales hay una unidad de millar y sobran 9 centenas que escribimos debajo de la columna correspondiente, reservàndonos la unidad de millar para agregarla á los otros millares, así: 1 que llevamos y 2 son 3 y 1, 4 que lo escribimos debajo de los millares. Por último sumamos la columna de las decenas de millar, diciendo, 8 y 9 son 17, que se escribe á la izquierda de la cifra de los millares de la suma. Por consiguiente la suma total de los números propuestos es 174974.

En la práctica, se suma abreviadamente de este modo:

$$\begin{array}{r} 82456 \\ 973 \\ 91480 \\ 65 \\ \hline 174974 \end{array}$$

Empezando por la columna de las unidades, digo: 6, 9, 14 (se escribe 4 y se lleva 1). Para las decenas; 6, 13, 21, 27 (se escribe 7 y se llevan 2). Para las centenas: 6, 15, 19 (se escribe 9 y se lleva 1). Los millares: 3, 4 (se escribe 4 y no se lleva nada). Las decenas de millar: 8, 17 se escribe

integra la suma parcial 17, porque ya no hay más columnas para sumar. La suma es, pues, 174974, la misma que hallamos antes.

41. La adición, se empieza generalmente por las unidades simples y se continùa por las decenas, centenas, etc., sin que esto quiera decir que no pueda practicarse principiando por las unidades de orden superior; solo tiene el inconveniente de que pueden resultar en cada suma parcial algunas unidades del orden superior inmediato, al que no podrán añadirse fácilmente estando éstas ya sumadas; por cuya razón conviene siempre empezar la suma por las unidades de orden inferior.

42. Obsérvase que, *el número de las unidades comprendidas en la suma de varios números, es completamente independiente del orden en que estén colocados los sumandos;* porque es evidente que el resultado final siempre contendrá todas las partes de los sumandos, cualquiera que sea el orden de éstos; luego el resultado de la suma depende tan solo del valor de los sumandos: de donde se deduce tambièn que, *una suma queda aumentada ó disminuida en el mismo número de unidades en que se aumenten ó disminuyen los sumandos.*

43. Las reglas de la adición y las que se darán para las demás operaciones son exactas, pero al ejecutarlas puede cometerse algún error, por lo que conviene *hacer la prueba* para tener la probabilidad de que no nos hemos equivocado.

La prueba de la adición, se hace sumando de nuevo los números dados en sentido inverso al seguido para obtener la primera suma. Si la operación está bien practicada, las dos sumas obtenidas serán iguales.

Es fácil tambièn equivocarse al practicar la prue-

ba, pero es difícil que el error de ésta se compense con el de la operación principal, por lo que en general puede tomarse como cierto el resultado en que la operación y la prueba sean iguales.

44. Usos DE LA SUMA Esta operación se emplea en todos los casos que se trata de encontrar el número que exprese la reunión ó conjunto de unidades contenidas en otros números dados, ó cuando se quiere aumentar un número, con el valor de otro ó de varios otros.

45. No pueden adicionarse sinó las unidades de la misma especie, ó cuando menos han de tener todas el mismo nombre.

Por ejemplo, no podemos sumar 4 naranjas con 8 libros, porque no forman ni 12 naranjas ni 12 libros.

Tampoco podríamos adicionar 3 metros con 7 litros, porque no son unidades de la misma especie; pero podríamos adicionar 8 pesos con otros 6 y formaríamos 14 pesos.

Hay unidades que aún no siendo de la misma especie pueden sumarse, porque tienen el mismo nombre, como por ejemplo:

En la quinta de Don Benito Trias hay un montecito que tiene 100 naranjos 47 manzanos y 53 cerezos, de modo que el montecito se compone de 200 árboles frutales.

En la estancia de don Tomás Fontela contamos un rodeo que tenía 300 vacas, 100 novillos y 20 toros es decir que se componía de 420 reses vacunas.

46. Las adiciones de muchos sumandos, conviene practicarlas dividiendo la operación en varias sumas parciales que cada una contenga ocho ó diez sumandos, y la adición de esas sumas parciales dará el resultado total.

PROBLEMAS

1.° En una biblioteca se han colocado en cinco estantes los siguientes libros: 300 muy grandes, en el primer estante; 450 en el segundo; 285 en el tercero; 586 en el cuarto y 2837 volúmenes pequeños en el quinto: se desea saber el número total de libros que contiene la biblioteca.

$$\begin{array}{r} 300 \\ 450 \\ 285 \\ 586 \\ 2837 \\ \hline 4458 \end{array}$$

Se ejecuta la operación como se ha explicado en la regla general que hemos dado en el número **40**, y el resultado 4458 expresa el número de libros que contiene la citada biblioteca.

2.° Un comerciante se estableció con un capital de 8357 pesos, y al fin del primer año se encontró con una ganancia líquida de 936 pesos, en el segundo ganó 1560 pesos, en el tercero ganó 2324, y además recibió una herencia de 25985 pesos; ¿que capital tenía al terminar el tercer año?

$$\begin{array}{r} 8357 \\ 936 \\ 1560 \\ 2324 \\ 25985 \\ \hline \text{Resultado} \quad 39162 \text{ pesos} \end{array}$$

3.° El planeta que habitamos, está principalmente dividido en cinco partes, que son: Europa, Asia, Africa, América y Oceanía. En Europa hay próximamente 300020415 habitantes, en Asia 800100932, Africa tiene 200000000, América 120105213, y Oceanía 42005356, ¿que número de habitantes tiene la tierra toda?

300020415
800100932
200000000
120105213
42005356
1462231916

Tiene apróximadamente 1462231916 habitantes.

LECCIÓN VI

Sustracción de los números enteros

46. *La sustracción es la operación que tiene por objeto, con la suma de dos números y uno de estos, encontrar el otro*; ó lo que es lo mismo: *hallar la diferencia que existe entre dos números dados.*

A la suma dada, se le da el nombre de *minuendo;* al sumando conocido, el de *sustraendo*, y al que se busca, el de *resto ó diferencia.*

47. De la definición que hemos dado de la sustracción se deduce: que *el minuendo es igual á*

la suma del sustraendo y el resto, de modo que el resto es lo que le falta al sustraendo para valer tanto como el minuendo. Así pues, podrá hallarse su valor quitando del minuendo todas las unidades del sustraendo, y las que queden ó sobren serán el resto ó diferencia. Por consiguiente, puede también decirse que la SUSTRACCIÓN *es la operación que tiene por objeto quitar o restar de un número dado, otro menor.*

48. La sustracción se indica con este signo —, que se llama *menos*, y se coloca entre el minuendo y el sustraendo, así: 8—5, se lée 8 menos 5.

49. En la sustracción se distinguen dos casos:

1.º Restar un número dígito de otro número cualquiera.

2.º Restar un número de más de una cifra, de otro compuesto de varias.

1er. CASO. Para restar de un número entero cualquiera, otro de una sola cifra, se quitan ó restan del primero una á una todas las unidades que componen el segundo.

Así, para hallar la diferencia entre 6 y 13, ó sea para restar 6 de 13, digo: 13—1=12, 12—1=11, 11—1=10, 10—1=9, 9—1=8, 8—1=7; de modo que hemos restado sucesivamente del minuendo 13, una á una las 6 unidades de que está compuesto el sustraendo, y nos han sobrado 7, luego la diferencia entre 13 y 6 es 7, ó sea

$$13-6=7$$

También podríamos haber hallado la diferencia, nombrando todos los números superiores al 6 hasta el 13 inclusive, contando con los dedos el número de números nombrados, y ese número será la diferencia que buscamos.

Así se dice, 7 *(uno)*, 8 *(dos)*, 9 *(tres)*, 10 *(cuatro)*, 11, *(cinco)*, 12 *(seis)*, y 13 *(siete)*: hemos nombrado 7 números, luego 7 es la diferencia que buscamos, porque ha sido necesario agregar 7 unidadades una á una al sustraendo 6, para obtener el minuendo 13.

50. El procedimiento que acabamos de indicar es el mas sencillo que puede emplearse para hallar la diferencia entre dos números, pero la operación es larga y muy engorrosa cuando la diferencia es muy grande, por lo que es más conveniente aprender de memoria las diferencias que hay entre los números dígitos entre sí, y entre estos y los números mayores de 10 y menores de 19. De este modo podremos decir rápidamente restando 4 de 9 quedan 5, restando 8 de 14 quedan 6; también se dice de 4 á 9 van 5, de 8 á 14 van 6, de 9 á 17 van 8, etc.

51. Por medio de la tabla de sumar que insertamos en el número **38**, puede aprenderse de memoria todas las diferencias necesarias para resolver cualquier problema de sustracción de números enteros; pero para mayor comodidad de los estudiantes, insertamos á continuación la siguiente:

TABLA DE SUSTRACCIÓN

De	7 – 1	restan	6	De	10 – 2	restan	8
»	5—1	»	4	»	5—2	»	3
»	8—1	»	7	»	7—2	»	5
»	6—1	»	5	»	9—2	»	7
»	4—1	»	3	»	6—2	»	4
»	9—1	»	8	»	8—2	»	6
»	2—1	»	1	»	4—2	»	2
»	10—1	»	9	»	11—2	»	9
»	3 – 1	»	2	»	3—2	»	1

De	8—3	restan	5
»	11—3	»	8
»	12—3	»	9
»	9—3	»	6
»	6—3	»	3
»	7—3	»	4
»	5—3	»	2
»	4—3	»	1
»	10—3	»	7

—

De	8—4	restan	4
»	13—4	»	9
»	12—4	»	8
»	11—4	»	7
»	9—4	»	5
»	5—4	»	1
»	7—4	»	3
»	6—4	»	2
»	10—4	»	6

—

De	8—5	restan	3
»	12—5	»	7
»	10—5	»	5
»	9—5	»	4
»	14—5	»	9
»	11—5	»	6
»	13—5	»	8
»	7—5	»	2
»	6—5	»	1

De	8—6	restan	2
»	7—6	»	1
»	9—6	»	3
»	11—6	»	5
»	10—6	»	4
»	12—6	»	6
»	13—6	»	7
»	15—6	»	9
»	14—6	»	8

—

De	15—7	restan	8
»	9—7	»	2
»	8—7	»	1
»	11—7	»	4
»	10—7	»	3
»	12—7	»	5
»	13—7	»	6
»	16—7	»	9
»	14—7	»	7

—

De	14—8	restan	6
»	11—8	»	3
»	17—8	»	9
»	15—8	»	7
»	16—8	»	8
»	12—8	»	4
»	10—8	»	2
»	9—8	»	1
»	13—8	»	5

De	14—9	restan	5
»	15—9	»	6
»	17—9	»	8
»	16—9	»	7
»	18—9	»	9
»	13—9	»	4
»	11—9	»	2
»	12—9	»	3
»	10—9	»	1

52. 2.º Caso. Si hubiéramos de restar 325 de 839, procederíamos por partes, hallando primero la diferencia entre las unidades simples, luego hallaríamos la diferencia entre las decenas, y, por último, buscaríamos la diferencia entre las centenas, diciendo así: de 5 unidades simples, que hay en el sustraendo, á 9, que tiene el minuendo, van 4 unidades; de 2 decenas á 3, va 1 decena; de 3 centenas á 8, van 5 centenas. De modo que la diferencia se compone de 5 centenas, 1 decena y 4 unidades, ó sea de 514 unidades.

La operación se dispone en esta forma:

839	*Minuendo*
—325	*Sustraendo*
514	*Diferencia*

La sustracción se practica generalmente diciendo; de 9, sacando 5, quedan 4 (que se escribe al pié de la línea horizontal debajo de las unidades); de 3, sacando 2, queda 1, que escribimos á la izquierda del 4; de 8, sacando 3 quedan 5, que escribimos á la izquierda del 1. El resto ó diferencia son 514 unidades, lo mismo que encontramos antes.

La operación que acabamos de practicar no ofrece dificultad alguna cuando, como en el ejemplo anterior, cada cifra del minuendo es mayor que la de igual orden del sustraendo; pero, en la generalidad de los casos, esto no sucede así como, por ejemplo: si quisiéramos hallar la diferencia entre 425 y 319, en cuyo caso tendríamos

que restar 9 de 5, lo que no es posible. Veamos, pues, cómo puede salvarse esta dificultad.

53. Hemos dicho (**47**) que la suma del sustraendo y el resto es igual al minuendo; luego, *si al minuendo se le agrega un número cualquiera, dejando el sustraendo intacto el resto aumentará igual número de unidades, y si se añade al sustraendo un número cualquiera, dejando intacto el minuendo, el resto disminuirá el mismo número de unidades;* porque en el primer caso es evidente que cuanto mayor sea el minuendo tanto más le faltará al sustraendo para igualarle; es decir tanto mayor será la diferencia ó resto. En el segundo caso es evidente también, que cuanto mayor se haga el sustraendo, tanto menos le faltará para igualar al minuendo; luego la diferencia ó resto será menor á medida que aumente el sustraendo.

De un modo análogo demostraríamos que, *si al minuendo se le sustrae un número de unidades, dejando intacto el sustraendo, el resto disminuirá igual número: y si se resta del sustraendo cierto número de unidades, la diferencia aumentará igual número.*

54. Teorema (•) *La diferencia entre dos números no varia aumentando ó disminuyendo dichos números en la misma cantidad.*

Hemos demostrado en el número anterior, que aumentando el minuendo, aumenta el resto la misma cantidad, y que aumentando el sustraendo, disminuye igualmente el resto; luego, aumentando al minuendo y sustraendo la misma cantidad, el resto no variará, porque todo lo que debía aumentar por un concepto, disminuye por

(•) Teorema es un enunciado especulativo en que se propone una verdad demostrable.

el otro, no alterándose por consiguiente la diferencia.

Del mismo modo probariamos que no se altera la diferencia, disminuyendo los dos números en una misma cantidad.

55. Hechas las precedentes consideraciones vamos á ver ahora como se procede, en general, para hallar la diferencia entre dos números enteros cualesquiera.

Propongámonos restar 9867 de 15459. Dispondremos la operación como hemos indicado en el número **52**.

15459	*Minuendo*
9867	*Sustraendo*
5592	*Resta ó diferencia*

Diremos: de 7, á 9, van 2, y lo escribimos en la resta debajo de las unidades; de 6, á 5, no puede ser, porqué de 5 no pueden sacarse 6, por lo que le agregamos una centena, ó sean 10 decenas, al 5, formándose así 15 decenas, y digo, de 6 á 15 van 9, que escribo á la izquierda del 2. Ahora, para que la diferencia no se altere, le agrego también una centena á las 8 del sustraendo, y digo: 8 y 1, 9, á 4, no puede ser; pero agregándole 10 centenas al 4, se forman 14, y diré: de 9, á 14, van 5, que escribo en el resto á la izquierda del 9. Ahora, lo mismo que en la sustracción de la cifra anterior, para que el resto no varie, le agregaremos 10 centenas, ó sea una unidad de millar, á las 9 del sustraendo, y formaremos 10, que restaremos de las 15 del minuendo, escribiendo la diferencia 5 á la izquierda del otro 5 que hallamos antes. Resultando, pues, que la diferencia entre los dos números propuestos, es de

5592 unidades.

En la práctica, para efectuar la operación anterior, se dice sencillamente así: de 7 á 9, van 2; de 6, á 15, van 9, y llevo 1; de 9, á 14, van 5, y llevo 1; de 10, á 15, van 5.

56. De todo lo expuesto últimamente, se deduce la siguiente:

REGLA GENERAL. *Para restar un número entero de otro, se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo, que las cifras de igual orden se correspondan. En seguida, empezando por la derecha, se restan sucesivamente todas las unidades de diferentes órdenes del sustraendo, de sus correspondientes del minuendo, y se escribe debajo la diferencia de cada una, y si alguna cifra del sustraendo es mayor que su correspondiente del minuendo, se añaden á la cifra del minuendo diez unidades de su orden, y en seguida, para que la diferencia no se altere, se añade á la cifra inmediata del sustraendo una unidad de su orden.*

57. PRUEBA DE LA RESTA Esta operación se comprueba sumando el sustraendo con la diferencia hallada; la suma que resulte debe ser igual al minuendo, si la sustracción está bien hecha (**47**).

58. USO DE LA RESTA. Empléase la sustracción siempre que se quiere conocer la diferencia entre dos cantidades; cuando conociendo la suma de dos números y con uno de éstos se quiere determinar el otro; cuando se quiere disminuir de una cantidad dada otra menor: etc.

PROBLEMAS

1.° Un comerciante compró artículos en un remate por valor de 45863 pesos, y los vendió al

día siguiente por 47325 pesos: ¿cuanto ganó en la venta?

47325	Precio de venta
45863	Precio de compra
1462	Diferencia

Ganó 1462 pesos.

2.° Entre Luis y Alberto reunen un capital de 25418 pesos, Luis tiene 13829, ¿cuanto tiene Alberto?

25418	Suma dada
13829	Sumando conocido
11589	Sumando que se busca

Tiene 11589 pesos.

3.° Enrique debía 4815 pesos: pagó 3920, cuantos queda debiendo?

4815	
3920	
895	Diferencia

Debe aun 895 pesos.

4.° Cuál es el número menor que 1870421 en 981509?

$$\begin{array}{r} 1870421 \\ 981509 \\ \hline 888912 \end{array}$$

Es el número 888912.

PROBLEMAS

DE ADICIÓN Y SUSTRACIÓN COMBINADAS

59. 1.° Julián y José tenian 12347 pesos, con los que compraron un campo en 7215 pesos; 600 reses ganado vacuno en 2400 pesos, y 1000 ovejas en 750 pesos. ¿Cuánto gastaron y cuanto les quedó?

7215	Valor del campo
2400	id. id. ganado vacuno
750	id. id. id. lanar
10365	Dinero gastado
12347	Capital social
1982	Diferencia que les queda

Resultado: gastaron 10365 pesos y les quedan 1982.

En este ejemplo de sustracción el minuendo 12347 ha sido colocado debajo del sustraendo 10365, al revés de lo aconsejado en el número **52** al solo objeto de no repetir la escritura de dicho sustraendo, cuya resta como es fácil comprender, no ofrece dificultad alguna, pues no hay más que restar de arriba para abajo, unas de otras las unidades de los diferentes órdenes, del mismo modo que se ha explicado en el número **56.**

Así, en este caso, hemos dicho: de 5 á 7, van 2, que escribimos en el resto; de 6, á 14, 8, y llevamos 1; 1 y 3, 4, á 13, 9, y llevamos 1; de 1 á 2, 1, y por último de 1, á 1, 0, que no escribimos porque los ceros á la izquierda de un número no tienen significación alguna.

2.° De Melo á Montevideo hay, próximamente, unos 450000 metros, cuya distancia nos propusimos caminar á pié; el primer día caminamos 18452 metros, el segundo, 25892, el tercero, 23614,

el cuarto, 26197, el quinto día, caminamos á caballo 96830 metros, y, ya muy cansados, nos quedamos en la orilla de un arroyo para descansar algunos días. ¿Cuánto caminamos los cinco primeros días, y cuanto habrá que caminar aún para llegar á la Capital?

28452	Metros	caminamos	el	1.er	día
25892	»	»	»	2.º	»
23614	»	»	»	3.º	»
26197	»	»	»	4.º	»
16830	»	»	»	5.º	»
210985	Metros andados				
450000	Distancia total				
239015	Distancia que falta recorrer.				

Resultado: el quinto día de viaje habíamos caminado 210985 metros, y nos faltaba recorrer una distancia de 239015 metros para llegar á Montevideo.

3.º Un molinero tiene 8459 sacos de harina de primera clase y 2936 de segunda. De la de primera vendió 1836 sacos y de la de segunda 397 sacos menos que de la otra. ¿Cuántos sacos vendió de la segunda y cuántos le quedan de cada clase?

1836	Sacos que vendió de la primera
397	
1439	Sacos que vendió de la segunda.
8459	
1836	
6623	Sacos que quedan de primera.
2936	
1439	
1497	Sacos que quedan de segunda.

Resultando: que vendió 1439 sacos de harina de segunda clase, y le quedaron 1497; y de la de primera clase le restan 6623 sacos.

4.º Cuál será el número, que, añadiéndole 8315 unidades y 35 centenas, y restando de la suma 9945 decenas, da por resultado la fecha del descubrimiento de América por Cristóbal Colón?

Cristóbal Colón descubrió la isla de San Salvador el 12 de Octubre de 1492, y si á esta fecha le agregamos las 9945 decenas propuestas, obtendremos la suma de los dos números 8315 unidades y 35 centenas, con el número que buscamos luego no habrá más que restar de la primera suma, la suma de los dos últimos, y la diferencia será el número buscado. Así:

1492	Fecha del descubrimiento.
99450	
100942	Suma del número buscado, y de los 8315 y 3500 dados.
8315	
3500	
11815	Suma de los números dados.
100942	Suma total
11815	Suma de los números dados
89127	Número que buscamos.

COMPROBACIÓN

89127	Número hallado
8315	Primer sumando propuesto
3500	Segundo » »
100942	Suma total
99450	Número dado para restar
1492	Fecha del descubrimiento.

EJERCICIOS

1.º Un comerciante le dice á un carrero, que los cuatro cajones de mercaderías que ha cargado para conducir á Rivera, pesan, el primero, 300 kgs.; el segundo, 250 kgs.; el tercero y cuarto, 280 kgs. cada uno; pero, en realidad, el primer cajón pesa 400 kgs., el segundo 320, y el tercero y cuarto pensan 350 kgs. cada uno, ¿cuánto peso de mas conduce el carrero, del declarado por el comerciante?

2.º Una persona recibió $ 4315 por un concepto, por otro 897 y por otro 1006, con estas cantidades pagó á varios 2132 $; ¿cuántos pesos le quedaron?

3.º La suma de tres números da 5412, uno de los sumandos es el número 817, otro es el número 2014, ¿cuál es el número que expresa el tercer sumando?

LECCIÒN VII

MULTIPLICACIÓN

60. *La multiplicación de un número por otro, es la operación que tiene por objeto encontrar un tercer número, que sea respecto á uno de ellos, lo que el otro es respecto de la unidad.*

La multiplicación de 6 por 4, se hará formando un número que se componga de tantas veces el 6 como el 4 se compone de la unidad; pero el

4 se compone de la adición de 4 unidades, luego el número que buscamos se compondrá de la adición de cuatro 6, ó sea de 6+6+6+6 igual á 24.

61. En la multiplicación de dos números, se llama *multiplicando* el número que se compara con el resultado: *multiplicador* el que se compara con la unidad; y *producto* el resultado de la multiplicación de dichos números.

62. La multiplicación se indica colocando entre los dos números que se quieren multiplicar, el signo $\times$ ó simplemente un punto.

La multiplicación de 6 por 4, se indica así: 6×4, ó bien 6.4, y se lee 6 multiplicado por 4, ó sencillamente 6 por 4.

En el ejemplo anterior, el número 6 es el multiplicando, el 4 el multiplicador, y 24 es el producto.

El multiplicando y el multiplicador, se llaman también *factores* del producto.

63. Según acabamos de ver, en la multiplicación de un número por otro, se repite el multiplicando tantas veces por sumando como unidades tiene el multiplicador; luego podemos definir la multiplicación de dos números enteros, diciendo que *es la operación que tiene por objeto hacer un número tantas veces mayor, como unidades tiene el otro.*

Por ejemplo, si queremos multiplicar 14 por 5 tomaremos el número 14 cinco veces por sumando, así:

$$\begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ 14 \\ 14 \\ 14 \\ \hline 70 \end{array}$$

La suma 70 será, pues, el producto de 14 × 5. Del mismo modo formaríamos el producto de 527 por 36, tomando el número 527 *treinta y seis* veces por sumando, y hallaríamos que es igual á 18972.

64. La multiplicación, tal cual la hemos practicado en los ejemplos anteriores, vemos que es sumamente larga y difícil cuando el multiplicador sea un número grande. Veamos, pues, de que medio podremos valernos para simplificar todo lo posible esta operación.

En la multiplicación de dos números enteros, distinguiremos tres casos:

1.º *Multiplicar un número de una cifra por otro también de una cifra.*

2.º *Multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola.*

3.º *Multiplicar dos números de varias cifras.*

1er. CASO. La multiplicación de un número de una cifra, se efectúa fácilmente aprendiendo de memoria la siguiente:

TABLA DE MULTIPLICAR

1	por	1	es	1	2	por	1	son	2
1	»	2	»	2	2	»	2	»	4
1	»	3	»	3	2	»	3	»	6
1	»	4	»	4	2	»	4	»	8
1	»	5	»	5	2	»	5	»	10
1	»	6	»	6	2	»	6	»	12
1	»	7	»	7	2	»	7	»	14
1	»	8	»	8	2	»	8	»	16
1	»	9	»	9	2	»	9	»	18
1	»	10	»	10	2	»	10	»	20
1	»	11	»	11	2	»	11	»	22
1	»	12	»	12	2	»	12	»	24

3	por	1	son	3
3	»	2	»	6
3	»	3	»	9
3	»	4	»	12
3	»	5	»	15
3	»	6	»	18
3	»	7	»	21
3	»	8	»	24
3	»	9	»	27
3	»	10	»	30
3	»	11	»	33
3	»	12	»	36

4	por	1	son	4
4	»	2	»	8
4	»	3	»	12
4	»	4	»	16
4	»	5	»	20
4	»	6	»	24
4	»	7	»	28
4	»	8	»	32
4	»	9	»	36
4	»	10	»	40
4	»	11	»	44
4	»	12	»	48

5	por	1	son	5
5	»	2	»	10
5	»	3	»	15
5	»	4	»	20
5	»	5	»	25
5	»	6	»	30
5	»	7	»	35
5	»	8	»	40
5	»	9	»	45
5	»	10	»	50
5	»	11	»	55
5	»	12	»	60

6	por	1	son	6
6	»	2	»	12
6	»	3	»	18
6	»	4	»	24
6	»	5	»	30
6	»	6	»	36
6	»	7	»	42
6	»	8	»	48
6	»	9	»	54
6	»	10	»	60
6	»	11	»	66
6	»	12	»	72

7	por	1	son	7
7	»	2	»	14
7	»	3	»	21
7	»	4	»	28
7	»	5	»	35
7	»	6	»	42
7	»	7	»	49
7	»	8	»	56
7	»	9	»	63
7	»	10	»	70
7	»	11	»	77
7	»	12	»	74

8	por	1	son	8
8	»	2	»	16
8	»	3	»	24
8	»	4	»	32
8	»	5	»	40
8	»	6	»	48
8	»	7	»	56
8	»	8	»	64
8	»	9	»	72
8	»	10	»	80
8	»	11	»	88
8	»	12	»	96

Lo suma 20448, representa el producto que buscamos; cuya suma la hemos obtenido repitiendo respectivamente 6 veces cada orden de unidades que componen el multiplicando, y una vez que conocemos de memoria la tabla de multiplicar, podremos abreviar la operación practicándola y disponiéndola en la forma siguiente:

3408	Multiplicando
×6	Multiplicador
20448	Producto.

Digo: 6 por ocho, son 48, en 48 unidades hay 4 decenas y ocho unidades, escribo las unidades y reservo las decenas para el producto parcial siguiente; 6 por 0, es 0 y 4 decenas del producto anterior son 4, que escribo: 6 por 4 son 24, escribo 4 y llevo 2; 6 por 3, son 18 y dos del otro producto son 20 que escribo.

El producto buscado se compone de 20 millares, 4 centenas, 4 decenas y 8 unidades.

67. Como este procedimiento puede aplicarse á otro ejemplo cualquiera, podemos formular la siguiente regla:

Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, se multiplican sucesivamente todas las cifras del multipticando por el multiplicador empezando por la derecha, y si en alguna de estas multiplicaciones parciales resultan unidades del orden inmediato, se reservan para agregarlas al producto siguiente.

Multiplíquese 915498 por 8:

$$\begin{array}{r} 915498 \\ \times 8 \\ \hline 7323984 \end{array}$$

Diremos: 8 por 8, son 64, escribo 4 y llevo 6; 8 por 9, son 72 y 6 son 78, escribo 8 y llevo 7; 8 por 4, son 32 y 7 son 39, escribo 9 y llevo 3; 8 por 5, son 40 y 3 son 43, escribo 3 y llevo 4; 8 por 1, es 8 y 4 son 12, escribo 2 y llevo 1; 8 por 9, son 72 y 1 son 73, que escribo integro.

69. TEOREMA *Para multiplicar una suma indicada por un número entero, se multiplica cada sumando por dicho número y la suma de los productos parciales que se obtengan formará el producto total.*

Sea multiplicar 5+3+8 por 6; y digo que

$$(5+3+8)\times 6=5.6+3.6+8.6 \quad (^1)$$

Porque es evidente que, para hacer 6 veces más grande una suma, basta hacer 6 veces mas grande cada uno de los sumandos.

70. TEOREMA —*Para multiplicar una diferencia indicada por un número entero, se multiplican el minuendo y sustraendo por dicho número y se restan los productos parciales.*

Sea multiplicar la diferencia 8—5 por 2; y digo que:

$$(8-5)\times 2=8.2-5.2$$

En efecto, como que el orden de los factores no altera el producto, lo mismo es 8—5 multiplicado por 2, que 2 multiplicado por 8—5, y según la definición que hemos dado de la multiplicación (**60**), para hallar este último producto tendremos que tomar el número 2 ocho veces por

(1) Para indicar que un número compuesto de varios otros ligados por los signos +, —, se ha de multiplicar ó dividir por otro, ó ha de someterse a cualquiera otra operación, se encierra dicho número dentro de un paréntesis.

sumando y después cinco veces, restando en seguida el segundo resultado del primero; así:

$$(8-5)\times 2=2\times(8-5)=2.8-2.5=8.2-5.2$$

71. El producto de varios factores, por ejemplo, 5.2.4.3, se obtiene multiplicando el 5 por 2, el producto 10 por 4 y el producto 40 por 3; en efecto, tenemos que

$$5.2.4.3=10.4.3=40.3=120.$$

72. TEÓREMA—*El producto de varios factores enteros no se altera, cualquiera que sea el orden de colocación de estos.*

Sea el producto 7.2.3.5.6.

Vamos á demostrar primeramente, que no se altera su valor cambiando el orden de dos factores consecutivos, por ejemplo, el 3 y el 5, es decir que

$$7.2.3.5.6=7.2.5.3.6$$

En efecto:

$$7.2.3=7.2+7.2+7.2.$$

Ahora multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 5, tendremos:

$$7.2.3.5=7.2.5+7.2.5+7.2.5$$

ó bien

$$7.2.3.5=7.2.5.3$$

y multiplicando esta última igualdad por 6 resultará que

$$7.2.3.5\times 6=7.2.5.3\times 6$$

Luego, vemos que se puede mudar de lugar á dos factores consecutivos sin que se altere el pro-

ducto; por consiguiente, efectuando esta operación todas las veces necesarias para que cada factor ocupe el lugar que se desee, quedará demostrado el teorema.

Por ejemplo, para demostrar que el producto 2.4.5.3 equivale á 4.3.2.5, se efectuarán los siguientes cambios:

$$2.4.5.3=4.2.5.3=4.2.3.5=4.3.2.5$$

COROLARIO (1)—*Para multiplicar un producto de dos ó más factores por un número entero, basta multiplicar uno de los factores por este número.*

Multiplíquese el producto 8.3.5 por 4, digo que bastará multiplicar, por ejemplo, el factor 3 por 4; en efecto,

$$8.12.5=8.3.4.5=8.3.5.4.$$

73. 3.er CASO—Este caso lo consideraremos dividido en tres casos particulares, los cuales son:

I. *Multiplicar un número entero compuesto de varias cifras por la unidad seguida de ceros, es decir, por 10, 100, 1000, etc.*

II. *Multiplicar un número entero compuesto de varias cifras por cualquiera de las cifras significativas seguida de uno ó más ceros.*

III. *Multiplicar un número entero compuesto de varias cifras significativas por otro de las mismas condiciones.*

I. Para multiplicar un número entero por la unidad seguida de ceros, *se escriben á la derecha del número, tantos ceros como acompañan á la unidad que sirve de multiplicador,* pues hemos visto (**29**—4) que un número se hace diez, cien, mil,

(1) Llámase COROLARIO ó consecuencia á una verdad que se deduce fácilmente de otra verdad evidente ó ya demostrada.

etc., veces mayor agregándole uno, dos, tres, etc. ceros á su derecha.

Por ejemplo, para multiplicar el número 347 por 100 se le agregan dos ceros á su derecha y quedará multiplicado, así: 34700.

El número 9584 multiplicado por 10000, será igual á 95840000, y 276521×1000000=276521000000.

II. Multipliquemos 536×300. El producto se obtendrá sumando el número 536, trecientas veces consigo mismo (**63**) cuya suma la podemos disponer en cien grupos de á tres sumandos cada uno; de modo que cada grupo representará el producto de 536×3, y como hay cien grupos, el producto total será igual á 100 veces 536×3, ó sea á dicho producto, agregándole dos ceros á la derecha, luego vemos que:

Para multiplicar un número entero por cualquiera de las cifras significativas seguida de uno ó más ceros, se multiplica el número por dicha cifra y á la derecha de este producto se escriben tantos ceros como tiene el multiplicador.

EJEMPLOS

149	536	9086
×90	×300	×7000
13410	160800	63602000

III. La multiplicación de los números 4835× 345, se hallará repitiendo 345 veces el multiplicando 4835 por sumando, ó lo que es lo mismo, repitiéndolo primeramente 5 veces, después 40, y por último 300. Pero tomar el multiplicando 5 veces por sumando, equivale á multiplicarlo por 5; tomarlo 40; veces, es multiplicarlo por 40 lo mismo

que tomarlo 300 veces, equivale á multiplicarlo por 300. Luego, pues, para hallar el producto de 4835×345, multiplicaremos primeramente el número 4835 por 5, después por 40 y al fin por 300. La suma de estos productos parciales formará el total.

El producto de 4835 por 5 es igual á

24175 *unidades.*

El producto de 4835 por 40, según hemos visto en el caso anterior, es igual á 193400, ó sean

19340 *decenas.*

El producto de 4835 por 300, se obtiene, según hemos visto, con solo multiplicar el multiplicando por 3 y agregar á este producto dos ceros, ó considerarle como expresando centenas; de este modo, 4835×300 es igual á 1450500 ó sea á

14505 *centenas*

Ahora, colocando estos tres productos parciales unos debajo de los otros, de manera que las cifras de un mismo orden se correspondan, se suman y se obtiene el producto total, así:

```
  24175
 19340
14505
-------
1668075
```

Esta colocación se obtiene fácilmente al ejecutar la multiplicación, teniendo cuidado de hacer

que la primera cifra de la derecha de cada producto parcial ocupe el lugar correspondiente al de la cifra que sirvió de multiplicador.

El ejemplo anterior en la práctica se resuelve así:

```
   4835
    345
-------
  24175
 19340
14505
-------
1668075
```

Diciendo: 5 por 5, son 25, escribo 5 y llevo 2; 5 por 3, son 15 y dos que llevo son 17, escribo 7 y llevo 1; 5 por 8, son 40 y uno que llevo son 41, escribo 1 y llevo 4; 5 por 4, son 20 y 4 que llevo son 24, que se escribe íntegro. Ahora se multiplica por 40, ó sea por 4 decenas, cuyo producto parcial ya se ha visto que es un número justo de decenas, por cuya razón escribiremos la primera cifra de este producto debajo de las decenas del producto parcial anterior Así, digo: 4 por 5 son 20, escribo 0 debajo de las decenas y llevo 2; 4 por 3, son 12 y 2 que llevo 14, escribo 4 y llevo 1; 4 por 8, son 32 y uno que llevo 33, escribo 3 y llevo 3; 4 por 4, son 16 y 3 que llevo son 19, que escribo íntegro.

Falta ahora multiplicar por 300, ó sea por 3 centenas, cuyo producto parcial será, según se ha visto, un número exacto de centenas, por cuya razón escribiremos la primera cifra de este producto, debajo de las cifras de las centenas de los productos anteriores. Así digo: 3 por 5, son 15, escribo 5 en el lugar correspondiente de las centenas y llevo 1; 3 por 3, son 9 y 1 que llevo 10;

escribo cero y llevo 1; 3 por 8, son 24 y 1 que llevo 25, escribo 5 y llevo 2; 3 por 4, son 12 y 2 que llevo son 14, que escribo íntegro. Se suman los tres productos parciales y el resultado **1668075** es el producto total buscado.

74. El procedimiento que hemos seguido para hallar el producto de los dos números propuestos en el ejemplo anterior, puede aplicarse á cualquiera otros números que se propongan; por consiguiente, podemos formular la siguiente regla general.

Para multiplicar un número entero compuesto de varias cifras por otro de las mismas condiciones, se multiplica el multiplicando por cada cifra significativa del multiplicador: escribiendo los productos parciales, unos debajo de los otros, de modo que la primera cifra de la derecha de cada uno ocupe el mismo lugar que la cifra correspondiente del multiplicador; después se suman los productos parciales y esta suma expresará el producto total.

Ejemplo, multipliquemos 7468300241 por 50986402

```
       7468300241   Multiplicando
         50986402   Multiplicador
  ---------------
      14936600482 ⎫
     29873200964  ⎪   Productos
    44809801446   ⎬
   59746401928    ⎪   parciales
  67214702169     ⎪
 37341501205      ⎭
 ----------------
 380781758344322882   Producto total
```

Como se ve en este ejemplo se ha omitido la multiplicación de los ceros del multiplicador por el multiplicando, porque los productos parciales

correspondientes, se compondrían de puros ceros y no influirían en la suma que viene á ser el producto total.

75. En la multiplicación de los números enteros, puede ocurrir que uno ó ambos factores terminen en ceros. En tal caso puede abreviarse la operación prescindiendo de ellos y escribiéndolos después á la derecha del producto total.

Multiplícase 4265 por 3700

4265	
3700	
29855	Producto por 7
12795	Producto por 3
15780500	Producto total

El producto de 4265 por 3700, se hallará repitiendo 3700 veces como sumando el número 4265, cuya suma puede dividirse en 100 grupos de á 37 sumandos cada uno.

El valor de cada grupo estará representado por 4265×37, ó sea por 157805, y como son 100 grupos que hay, todos juntos compondrán 157805×100, que según se ha visto (**73**—I) es igual á 15780500; número que ha resultado de multiplicar 4265 por 37 y escribir dos ceros á la derecha de ese producto; conforme con lo que hemos enunciado.

Ahora multipliquemos 7300 por 2500.

7300	
2500	
365	Producto por 5
146	Producto por 2
18250000	Producto total.

El producto de 7300 por 2500, es igual á 7300 tomado 2500 veces por sumando. Esta suma puede descomponerse en 100 grupos de 25 sumandos cada uno, valiendo cada grupo 7300×25, ó sean 182500, y los 100 grupos valdrán 182500×100 ó sea 18250000, número que ha resultado de multiplicar 73×25, escribiendo luego cuatro ceros á la derecha de ese producto, conforme con lo que queríamos demostrar.

Otros ejemplos:

```
  8360              549000
 ×42000            ×1480000
---------          -----------
 1672               4392
3344               2196
---------          549
351120000          -----------
                   812520000000
```

76. Observación—*El producto de dos factores tiene tantas cifras como estos ó una menos.*

Veamos los factores 5428×756: digo que el producto tendrá 6 ó 7 cifras.

En efecto, este producto está evidentemente comprendido entre 5428×100=542800 y 5428×1000 =5428000; luego, tendrá á lo menos 6 cifras como el primero y á lo más 7 como el segundo.

77. Prueba de la multiplicación--Esta operación se prueba invirtiendo el orden de los factores, es decir, tomando el multiplicando por multiplicador y viceversa. El producto debe ser igual al primero si la operación está bien hecha, pues se ha dicho (**66**) que el orden de los factores no altera el producto.

78. Se dice que; *un número es múltiplo de*

otro, cuando representa el producto de este por otro entero cualquiera.

Así, 12 es múltiplo de 4, porque es igual á 4×3; del mismo modo vemos que 48 es múltiplo de 16, porqne es igual á 16×3.

Un número se llama *duplo* ó *doble* de otro, cuando contiene á este dos veces exactamente: 16 es duplo de 8; 24 es duplo de 12.

Un número se llama *triplo, cuàdruplo, quintuplo, séxtuplo, sèptuplo, óctuplo, etc.*, de otro, cuando respectivamente le contiene 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc., veces exactamente.

Por ejemplo, el número 21, es triplo de 7, por que le contiene 3 veces exactamente; asi como el 45, es quíntuplo de 9; el 56, es séptuplo, de 8, etc.

79. Se llama potencia de un número al producto que resulta multiplicando dicho número varias veces por si mismo.

Así 27 es una potencia de 3, porque 3.3.3=27.

Al producto que resulta de tomar un número dos veces por factor se llama *cuadrado* ó *segunda potencia.*

Al producto que resulta de tomar un número tres veces por factor, se le llama *cubo ó terçera potencia.*

Al producto que resulta de tomar un número cuatro veces por factor se le da el nombre de *cuarta potencia*, y así sucesivamente.

80. Las potencias se expresan abreviadamente escribiendo á la derecha del número y un poco más arriba, un numerito llamado *exponente de la potencia*, el cual indica las veces que se ha de tomar por factor el número dado.

Así, 3^2=3.3=9 es la segunda potencia ó cuadrado de 3.

$5^3 = 5.5.5 = 125$ es la tercera potencia ó cubo de 5.

$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$ es la quinta potencia de 2.

81. USOS DE LA MULTIPLICACIÓN Se hace uso de la multiplicación, *cuando se quiere hacer un número cualquiera cierto número de veces mayor.*

Cuando conocido el valor de una unidad, se quiere hallar el valor de un número cualquiera de unidades de la misma especie, etc

PROBLEMAS

¿Cuál será el número 389 veces mayor que 737881?

```
   737881
      389
---------
  6640929
 5903048
2213643
---------
287035709
```

Resultado: el número pedido es 287035709.

2°. Un metro de género costó 235 centésimos de peso; ¿cuánto costarán 687 metros del mismo género?

```
   687
   235
------
  3435
 2061
1374
------
161445
```

Resultado: costarán 161445 centésimos.

3º. La rueda de un molino da 86 vueltas por minuto; ¿cuántas dará en ocho dias?

Este problema quedará evidentemente resuelto, reduciendo los dias á horas y estas á minutos, y multiplicando el resultado por 86 vueltas que da la rueda por minuto, se tendrá resuelto el problema.

```
    24  Horas
     8  Dias
 ------
   192  Horas
    60  Minutos
 ------
 11520  Minutos
    86
 ------
  6912
 9216
 ------
990720  Vueltas
```

Resulta que en ocho dias la rueda da 990720 vueltas.

4º. 486 hombres hicieron una escavación en 36489 horas; ¿un solo hombre cuánto tiempo necesitará para hacer la misma obra?

Es evidente que teniendo un hombre que hacer por sí solo todo el trabajo que hicieron 486 empleará 486 veces más tiempo, luego

```
   36489
     486
--------
  218934
 291912
145956
--------
17733654
```

Resulta que necesitará 17733654 horas para hacer el mismo trabajo.

Problemas de adición, sustracción y multiplicación combinadas

1°. Un hacendado compró un campo compuesto de 4685 hectáreas de terreno de superior calidad, 1257 de clase regular y 838 inferior; la hectárea de terreno superior le costó 17 pesos, la regular 13 y la inferior 8; á los pocos días tuvo ocasión de vender todo el campo á razón de 16 pesos la hectárea; ¿cuánto ganó en la venta?

4685	hectáreas	á	$ 17	importan	$	79645
1257	»	»	» 13	»	»	16341
839	»	»	» 8	»	»	6712
6781	hectáreas costaron				$	102698

6781 hectáreas vendidas á $ 16 una	$	108496
Todo el campo costó	»	102698
Diferencia	$	5798

Resultado: se ganó 5798 pesos.

2°. Un agricultor recogió en un terreno 1352 hectólitros de trigo, en otro 987, en otro 2046 y en otro 7163, de cuyas cantidades reservó 875 para semilla y perdió 614 que se le incendiaron; el resto lo vendió á razón de 45 reales el hectolitro ¿Cuánto importa el trigo vendido?

1352	875	
987	614	
2046		
7163	1489	trigo separado
11548	hectólitros recogidos	

```
 11548
—1489
------
 10059   Hl.   de trigo para vender .
   ×45
------
 50295
40236
------
452655   reales
```

El trigo vendido importa 452655 reales.

3º. Un comerciante debe á varias casas de Montevideo 37856 pesos; á sus dependientes y á otros acreedores de la localidad, 3429 pesos, y sólo cuenta para pagar, con un terreno compuesto de 4827 hectáreas, que puede vender á 7 pesos la hectárea, y con 5314 pesos en mercaderías; ¿cuánto quedará debiendo después de entregar todos sus intereses á los acreedores?

```
       37856
        3429
      ------
Debe   41285   pesos

 4827
    7
-----
33789   valor del terreno
 5314     »   de las mercaderías
-----
39103   valor total

 41285
—39103
------
  2182   Diferencia
```

Quedará debiendo 2182 pesos.

EJERCICIOS

1°. En la construcción de un cerco trabajaron 28 días un albañil y un peón, ganando 37 reales diarios entre los dos; el jornal del peón importaba 13 reales menos que el del oficial albañil: se quiere saber cuanto ganó cada uno.

2°. Un comerciante compró en el Brasil 3468 barricas de azúcar, y 1875 rollos de tabaco; cada barrica de azúcar le costó 15 pesos y cada rollo de tabaco 6; entre derechos, fletes y comisiones gastó 38430 pesos: en seguida vendió en esta Villa, la barrica de azúcar á 28 pesos y el tabaco á 10 pesos el rollo; ¿cuánto ganó en la venta?

3°. Un peón que gana 18 reales diarios, casa y comida, ha trabajado 3 años, 5 meses y 4 días sin arreglar cuentas con su patrón, y al cabo de este tiempo, con motivo de tener que pagar una deuda que importaba 8315 reales, le pidió al patrón sus haberes: ahora se quiere saber á cuanto ascienden dichos haberes, y que dinero le quedará después de pagar la expresada deuda.

4° Un comerciante compró 365 cajas de fideos de 1ª. clase, 842 de 2.ª y 1417 de 3ª.; los de 1.ª le costaron á razón de 35 reales caja, los de 2ª. á 28 y los de 3ª. á 18.

Los tuvo algún tiempo depositados y al fin observa que están todos algo averiados; por tanto, se apresura á venderlos y solo puede obtener á razón de 19 reales caja al barrer; ¿cuánto perdió en la venta?

5°. Un propietario vnedió un solar compuesto de 4659 metros cuadrados de terreno á razón de 87 reales el metro, otro de 2130 metros á 69 reales, recibiendo á cuenta de dicho importe una ca-

sa que, con el terreno que ocupa vale 393605 reales: ¿cuánto le quedaron debiendo?

6º. El Coronel de un regimiento ofreció á sus soldados 27 centésimos por cada piel de nutria que le llevasen; al cabo de algunos días los soldados del 1er. escuadrón le habían reunido 328 pieles, los del 2º., 149 y los del 3º. 275. Encontrándose el Coronel con solo 18425 centésimos, ¿cuánto le queda debiendo á sus soldados?

7º. Un tren esprés camina á razón de 85 kilómetros por hora, y se quiere saber, si anduviese sin parar 2 meses, 15 días y 8 horas, cuánto kilómetros recorrería.

8º. Un comerciante tenía 3615 sacos de maíz que le costaban 24 reales cada uno: vendió 2467 sacos á 26 reales uno, y el resto á 23; ¿cuánto ganó ó perdió en la operación?

9º. En una escuela que hay 125 bancos, en cada uno de los cuales se sientan 4 niñas y otros 36 que contienen 5 cada uno, dispuso la Directora que de las 2815 naranjas que tiene guardadas, se entreguen durante el recreo, tres naranjas á cada niña: ¿cuántas naranjas le sobraron?

LECCIÒN VIII

División

82. La División, *es la operación que tiene por objeto con el producto de dos factores y uno de ellos, determinar el otro.*

El producto dado, se llama *dividendo*; el factor conocido, *divisor*, y el que se busca, se llama *cociente*.

83. Según la definición que hemos dado, resulta que, *el producto del divisor por el cociente debe producir el dividendo.* Luego, tratándose de números enteros, el cociente nos indica las veces que el dividendo contiene al divisor, porque, según hemos visto en la multiplicación, el producto de dos números enteros contiene á uno de estos tantas veces como unidades tiene el otro. Por consiguiente, podremos decir que la división de dos números enteros tiene por objeto, *averiguar cuantas veces un número contiene á otro; ó bien también repartir un número dado en tantas partes iguales como unidades tiene el otro.*

Tenemos por ejemplo que 36 es el producto de dos números, 8 es uno de ellos, el otro tiene que ser necesariamente 4, porque 9×4 son 36.

El dividendo 36 es igual al divisor 9 multiplicado por el cociente 4, ó lo que es lo mismo es igual á 4 veces 9; luego el cociente 4 nos indica las veces que el dividendo 36 contiene al divisor 9. Así pues, al dividir dos números enteros, averiguamos las veces que el uno contiene al otro; lo que está de acuerdo con la segunda definición que hemos dado.

También tenemos que 36=4×9 (**66.**), lo que nos dice que el dividendo es igual á 9 veces 4; de modo que se compone de 9 partes iguales á 4; ó lo que es lo mismo, el dividendo se compone de tantas partes iguales al cociente, como unidades tiene el divisor; luego, pues, al practicar la división de dos números enteros, repartimos uno de ellos en tantas partes iguales como unidades tiene el otro, conforme con la última definición que dimos de la división.

84. La división se indica escribiendo el di-

videndo y á continuación el divisor, separándolos por medio de dos puntos, de este modo: 36:9, y se lèe 36, dividido por 9; también puede escribirse el dividendo sobre una línea horizontal y el divisor debajo, asi: $\frac{36}{9}$ y se lée lo mismo: 36 dividido por 9.

85. Hemos visto en el ejemplo anterior que el cociente que resulta de dividir 36 por 9 es 4, es decir, un número entero.

No todas las divisiones dan por cociente un número entero; por ejemplo 23:7, pues tenemos que 7×3 son 21, número menor que 23 y 7×4 son 28, número mayor que 23; luego el cociente será mayor que 3 y menor que 4, por consiguiente se compondrá de 3 unidades enteras y además de una ó varias partes de otra unidad; en este caso el cociente será un número mixto. (**6**).

86. Toda división en que el cociente esté expresado por un número entero, se llama *exacta*, porque el dividendo contiene un número exacto de veces al divisor.

87. Cuando el cociente de una división no puede expresarse por un número entero, se llama *inexacta*, dándose el nombre de *cociente entero* al mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor, y *residuo*, á la diferencia que hay entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente entero. Luego: *en toda división inexacta, el dividendo, será igual al producto del divisor por el cociente entero, más el residuo* (**47**).

El residuo debe ser siempre menor que el divisor, pues si fuese igual ó mayor, el divisor estaría aun contenido en el dividendo una ó más ve-

ces, y por consiguiente, el cociente entero hallado no expresaría el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor.

En el ejemplo que pusimos (**85**), para probar que no todas las divisiones dan cociente exacto, hemos visto que 23:7, da por cociente entero 3, cifra que expresa el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor, y 2 de residuo que es la diferencia que hay entre el dividendo y el producto del cociente entero por el divisor; ó sea $23-3\times7=2$.

88. Se ha visto en el número **83**, que el cociente indica las veces que el divisor está contenido en el dividendo; por consiguiente, siempre podrá hallarse su valor restando el divisor del dividendo todas las veces que se pueda. Así, pues, vemos que la división es una operación contraria á la multiplicación (**63**).

Por ejemplo, para dividir 1392 por 348, restaré del número 1392 el 348 todas las veces que se pueda, y el número que exprese las veces que se ha restado, será el cociente. Así:

1392	
—348	Una vez
1044	
—348	Dos veces
696	
—348	Tres veces
348	
—348	Cuatro veces
000	

Se ha podido restar cuatro veces justas, luego el cociente de la división propuesta es 4, y la división exacta. Veamos ahora, dividiendo el número 1685 por 476:

1685	
—476	Una vez
1209	
—476	Dos veces
733	
—476	Tres veces
257	

En este caso solo se ha podido restar el divisor 476, tres veces del dividendo 1685, y han sobrado 257, número menor que el divisor. Luego, el cociente entero es 3, y 257, el residuo, que es lo que ha sobrado después de restar 3 veces el divisor del dividendo, ó, lo que es lo mismo, es la diferencia entre el dividendo y el producto del cociente entero por el divisor. Así:

$$1685 - 476 \times 3 = 257,$$

de modo que la división propuesta en este último ejemplo, es inexacta.

89. El procedimiento empleado en los ejemplos anteriores de división, es exacto, pero muy largo cuando el cociente es un número compuesto. Así pues, trataremos de estudiar otro medio más rápido que nos conduzca al mismo fin; para lo cual, en la división de los números enteros, distinguiremos tres casos.

1°. *Cuando el dividendo tiene una ó dos cifras y*

el divisor una sola, y el cociente ha de tener también una sola.

2º. *Cuando el dividendo tiene dos ó más cifras, el divisor una sola y el cociente ha de tener dos ó más.*

3º. *Cuando el dividendo, divisor y cociente tienen varias cifras.*

El cociente tendrá una sola cifra, cuando agregándole un cero al divisor resulte un número mayor que el dividendo: en caso contrario tendrá más de una.

90. 1er. CASO. Este caso se resuelve fácilmente sabiendo bien la tabla de multiplicar, pues basta hallar una cifra que multiplicada por el divisor produzca el dividendo ó el producto próximo menor, si la división fuera inexacta. Así:

El cociente de 6:2 es 3, porque $2 \times 3 = 6$

El cociente de 35:7 es 5, porque $7 \times 5 = 35$

El cociente de 72:8 es 9, porque $8 \times 9 = 72$

El cociente de 87:9 es 9 y sobran 6; porque 9×9 son 81, hasta 87, que representa el dividendo, van 6, que es el residuo.

El cociente de 76:8 es 9 y sobran 4; porque 8×9 son 72, á 76 van 4, que es el residuo.

Los tres primeros ejemplos son de divisiones exactas, y los dos últimos de divisiones inexactas.

91. 2º. CASO. Dividir 944 por 8.

Para mayor facilidad, supongamos que el número 744 representa naranjas, y que se trata de repartir esta cantidad entre 8 niños. Podríamos repartir dicho número de naranjas, entregando de á una, á cada uno de los 8 niños, hasta concluirse todas; pero esta operación sería muy larga. Así, pues, vamos á ver si la podemos abreviar entregando 100 naranjas á cada niño, con lo que repartiremos 800. Pero tenemos 944; luego nos

sobran 144, que no alcanzan para entregarles otro centenar de naranjas á cada uno, pero sí podemos repartirles 10 más á cada uno, con lo que les entregaremos entre los 8 otras 80; hasta 144 que nos quedaban, aun sobran 64, que repartidas entre los 8 les tocará á 8 naranjas á cada uno, por que 8×8 son 64; con lo que ya no nos quedan más naranjas. Luego, pues, hemos repartido las 944 entre los 8 niños y les ha tocado 100, más 10, más 8 naranjas, ó sean 118 á cada uno.

Este resultado lo hemos obtenido, tomando la octava parte, ó dividiendo por 8, cada una de las unidades de diferente orden que componen el número propuesto; y la reunión ó suma de todas estas partes, han formado el cociente buscado, ó sea, la octava parte del número dado.

Como se ve, este segundo caso también se resuelve fácilmente sabiendo la tabla de multiplicar.

Vamos ahora, usando el procedimiento anterior, á dividir el número 4657 por 9, tratando de simplificar algo más la operación, para lo cual la dispondremos en la forma siguiente:

Dividendo	4657	9 Divisor
5×9	45	517 Cociente
2º. *dividendo parcial*	15	
1×9	9	
3er. *dividendo parcial*	67	
7×9	63	
	4 Residuo	

Diremos: 4 unidades de millar no pueden repartirse entre 9 de modo que alcance á tocar millares justos á cada uno; empezaremos por dividir

entonces las 46 centenas: así, 46 entre 9, á 5, porque 5×9 son 45, á 46, que tenemos en el dividendo, todavía sobra 1 centena; 5 *son, pues, las centenas del cociente,* cuya cifra escribimos debajo del divisor. El producto 45 de la primera cifra del cociente por el divisor, lo colocamos debajo de las centenas del dividendo para efectuar la resta. A la derecha del resto 1 centena, ó sean diez decenas, bajamos las 5 decenas del dividendo, formando así 15 decenas, con lo que tendremos el *segundo dividendo parcial.*

Tenemos ahora que repartir las 15 decenas entre 9: le corresponderá 1; *que escribimos en el cociente á la derecha del 5;* multiplicamos esta segunda cifra del cociente por el divisor, ó sea 1×9 son 9 que colocamos debajo del segundo dividendo parcial 15, para hallar la diferencia, con el objeto de saber lo que nos queda aún para repartir, y decimos: de 9 á 15 van 6; nos sobran pues 6 decenas ó sean 60 unidades. A la derecha de dicha diferencia bajamos la cifra 7 de las unidades del dividendo, formando así 67 unidades que constituyen el 3er. *dividendo parcial.*

Dividimos por último las 67 unidades restantes entre 9. Corresponden á 7, porque 7×9 son 63, hasta 67 que tenemos, sobran 4 unidades que quedan sin repartir y forman el residuo. La cifra 7, hallada últimamente, la colocamos en el cociente á la derecha de la cifra 1, con lo que completamos el cociente entero.

Hemos dividido todas las diferentes unidades del dividendo por el divisor. Es, por consiguiente, evidente que el cociente entero de los números dados es 517 y el residuo 4.

Otro ejemplo: dividir 24416 por 8:

Dividendo	24416	8 *Divisor*
	041	3052 *Cociente*
	16	
	0	

Diremos: 2 no contiene al 8 ninguna vez; luego, empezaremos la división por las 24 unidades de millar del dividendo. Así:

24 entre 8 á 3

luego, 24 unidades de millar entre 8, corresponden á 3 unidades de millar. 3 *es, pues, la primera cifra del cociente, ó sea la de orden superior.*

Ahora restando del dividendo el producto de la primera cifra del cociente por el divisor, conoceremos las unidades de los otros órdenes inferiores que nos quedan para repartir;

3 por 8 son 24, á 24 va 0.

A la derecha de este resto, cero unidades de millar, se baja la cifra siguiente del dividendo, ó sea la de las centenas, y tendremos por dividendo parcial 4, que no contiene al divisor 8, ninguna vez; luego, *cero*, *es la segunda cifra del cociente,* que se escribe á la derecha de la anterior.

Se baja la siguiente cifra del dividendo, que es 1, con le que tendremos por dividendo parcial 41 decenas.

41 entre 8 á 5:

es decir, que 41 decenas, divididas entre 8, corresponden á 5 decenas; luego, 5 *es ta tercera cifra del cociente.*

Restando ahora del dividendo el producto de esta última cifra del cociente por el divisor, la diferencia serán las unidades que aún quedan para dividir.

5 por 8 son 40 á 41 va 1.

Nos queda una decena ó sean 10 unidades. Bájase á la derecha de este residuo la última cifra 6 del dividendo, con lo cual formaremos el último dividendo parcial, compuesto de 16 unidades, y diremos:

16 entre 8 á 2

2 es la última cifra del cociente, ó sea la de las unidades simples, y como:

2 por 8 son 16 á 16, 0,

resulta que la división propuesta da 3052 da cociente exacto.

Obsérvase que en este último ejemplo, *la multiplicación de cada cifra del cociente por el divisor y la sustracción del dividendo parcial respectivo, se ha hecho todo á un mismo tiempo,* lo que simplifica algo la operación.

92. Del procedimiento seguido en los ejemplos anteriores, se deduce la siguiente:

Regla.—*Para dividir un número compuesto de varias cifras por un dígito, se divide la primera cifra de la izquierda del dividendo por el divisor, y si no es posible, por ser menor la cifra del dividendo que la del divisor, se dividen las dos primersa cifras de la izquierda del dividendo por el divisor, y el cociente obtenido será la primera cifra del cociente total; se*

multiplica esta por el divisor y el producto se resta de las dos cifras de la izquierda del dividendo; á la derecha de este resto se escribe la tercera cifra de la izquierda del dividendo, y el número así formado se divide por el divisor; el resultado será la segunda cifra del cociente; se multiplica esta por el divisor y el producto se resta de aquel número; á la derecha de este segundo resto se baja la cifra siguiente del dividendo, y se divide este segundo número por el divisor, con lo que obtendremos la tercera cifra del cociente, y así sucesivamente hasta bajar la última cifra del dividendo.

Puede ocurrir que al bajar alguna cifra del dividendo para formar los dividendos parciales, resulte un número menor quc el divisor; en tal caso se pone cero en el cociente, y se baja á la derecha de dicho número la siguiente cifra del dividendo.

En la práctica se divide sencillamente de este modo:

Dividir 54690023 por 7

```
54690023 | 7
         |--------
56       | 7812860
 09
  20
   60
    42
     03
```

Digo: 54 entre 7, á 7; 7 por 7, son 49, á 54 van 5; bajo el 6. 56 entre 7, á 8; 8 por 7, 56, á 56 cero; bajo el 9. 9 entre 7, á 1, 1 por 7 son 7, á 9 van 2, bajo el cero. 20 entre 7, á 2; 2 por 7, son 14, á 20 van 6; bajo 0. 60 entre 7, á 8; 8 por 7, 56, á 60 van 4; bajo el 2. 42 entre 7, á 6; 6 por

7, 42, á 42 cero; bajo el 3. 3 entre 7, á 0 y sobran 3.

El cociente es 7812860 y el residuo 3.

93. Una vez que se haya adquirido bastante práctica en la división, pueden suprimirse los restos y dividendos parciales, lo cual es mucho más breve, así:

876540:5=175308 525924:6=87654
29502:9=3278 3460:8=432 y 4 de residuo.

Digo; la quinta parte de 8 es 1, (*que escribo después del signo=*) y mentalmente continúo diciendo, 1 por 5 es 5, á 8 van 3, que con el 7 (*es la cifra siguiente*) forman 37; la quinta parte de 37 son 7, (*que escribo á la derecha del 1*) continúo el cálculo mental diciendo: 5 por 7, 35, á 37, 2, que con el 6 forman 26; la quinta parte de 26 es 5, (*que escribo á la derecha del 7*), 5 por 5, 25 á 26, 1, que con el 5 forman 15: la quinta parte de 15, 3 (*que escribo á la derecha del 5*), 3 por 5, 15, á 15 cero; la quinta parte de 4 es cero, que pongo al lado del 3; sobran 4 que con el 0 forman 40; la quinta parte de 40 son 8, que escribo á la derecha del 0.

Luego la división de 876540 por 5 es exacta, siendo 175308 el cociente.

El segundo ejemplo se resuelve abreviadamente así:

La 6ª. parte de 52, 8 y sobran 4; la de 45, 7 y sobran 3; la de 39, 6 y sobran 3; la de 32, 5 y sobran 2; la de 24, 4 y no sobra nada.

94. También suele omitirse el divisor, disponiendo la operación en esta forma:

Dividir 360496 por 8

360496 *Dividendo*
45062 *Cociente*

Digo: la 8ª. parte de 36, 4 y sobran 4; la de 40, 5 y no sobra nada, la de 4, 0 y sobran 4: la de 49, 6 y sobra 1; la de 16, es 2.

Dividir 150506 por 7.

150506
21500 y sobran 6

Digo: la 7ª parte de 15, 2 y sobra 1; la de 10, 1 y sobran 3; la de 35, 5; la de 0, 0; la de 6, es 0 y sobran 6.

Esta última división es inexacta: el cociente entero es 21500 y el resíduo 6.

95. 3er. Caso Dividir 23936 por 68.

Sabemos que dividir un número entero por otro es hacer del dividendo tantas partes iguales como unidades tiene el divisor (**83**). Luego, dividir 23936 por 68, es hacer del número 23936, 68 partes iguales, que equivale á repartir las 23936 unidades entre 68 personas, de modo que todos tengan igual porción, y lo que á cada una le toque será el cociente.

Del mismo modo que en el segundo caso, empezaremos por repartir las unidades de orden superior y sucesivamente iremos repartiendo las de los otros órdenes inferiores, hasta repartir las unidades simples, y la reunión de todos estos cocientes parciales formarán el cociente total.

El número propuesto solo tiene 2 decenas de millar; luego, no se puede repartir ninguna decena de millar, puesto que necesitaríamos á lo menos 68 para dar una á cada persona; tampoco podemos empezar la partición por las unidades de millar, porque solo tenemos 23; así, pues, empezaremos por las centenas que son 239.

Para dividir las 239 centenas entre las 68 personas, observaremos que si solo les entregamos una centena á cada una, con 68 tendríamos suficientes; para entregarles 2, nos bastarían 136, y como hay muchas más vamos á probar de repartir 3 centenas á cada una, para lo cual necesitaremos 204; hasta 239 que tenemos, sobran 35, que ya no alcanzan para entregar una más á cada persona. Luego, pues, el primer cociente parcial es *3 centenas*, y nos sobran 35, que equivalen á 350 decenas más 3 que tenemos en el dividendo, forman 353.

Debemos dividir ahora las 353 decenas entre las 68 personas, y por tanteo, lo mismo que hemos hecho para repartir las centenas, veremos que toca á 5 decenas por persona; de modo que entre las 68 se llevan 68×5, ó sean 340, hasta 353 que tenemos sobran 13, que no alcanzan para repartir una más á cada persona. Luego el segundo cociente parcial es *5 decenas*, y sobran 13, ó sean 130 unidades, que con más 6 que hay en el dividendo, forman 136.

Por último, dividiremos las 136 unidades simples entre las 68 personas, y veremos que les toca á 2 unidades á cada una, porque 2×68, son 136. Luego, el tercer cociente parcial es *2 unides*.

Reuniendo todos los cocientes parciales, vemos que á cada una de las 68 personas les ha correspondido 3 centenas, 5 decenas y 2 unidades ó sean 352 unidades. Luego 352, es el cociente exacto que resulta de dividir el número 23936 por 68.

Divídase 483569 por 235.

El cálculo para determinar todas las partes del cociente, puede disponerse del modo siguiente:

Dividendo total	483569	235 *Divisor*
Producto de la 1ª. cifra del cociente por el divisor	470	2057 *Cociente*
2º. y 3er. dividendo parcial	1356	
Producto de la 3ª. cifra del cociente por el divisor	1175	
4º. dividendo parcial	1819	
Producto de la 4ª. cifra del cociente por el divisor	1645	
Residuo	174	

El dividendo 483569, es igual á 235 veces el cociente, lo que es lo mismo, se compone de 235 partes iguales al cociente. Luego, para encontrar su valor tendremos que dividir el número 483569 en 235 partes iguales, lo que evidentemente se

conseguirá dividiendo las unidades de todos los órdenes que forman el número propuesto, en 235 partes iguales, y la reunión de todas estas partes formará el cociente total buscado.

Las centenas y decenas de millar del número dado, son pocas para poderse dividir en 235 partes; así pues, empezaremos la división por las 483 unidades de millar, las cuales para mayor claridad las separaremos del dividendo total por medio de un punto, con lo que tendremos el primer dividendo parcial, formado de 483 unidades de millar.

483 unidades de millar, divididas en 235 partes iguales, ó lo que es lo mismo, repartidas entre 235 personas, toca á cada una 2 unidades de millar. *La cifra 2 será la del orden superior del cociente*, es decir, la de las unidades de millar, cuya cifra se escribe debajo del divisor.

Para determinar la segunda cifra del cociente, ó sea la de las centenas, se multiplica la cifra 2 de los millares del cociente por el divisor 235; su producto 470 millares se coloca debajo del primer dividendo parcial, ó sea de las 483 unidades de millar que separamos; se resta dicho producto del expresado dividendo, y la diferencia, 13, son las unidades de millar que han quedado sin repartir, las que equivalen á 130 centenas, que sumadas con las 5 que tiene el dividendo total, son 135 centenas que tenemos para dividir entre 235; es decir, que el número 135 forma el 2°. dividendo parcial, el cual vemos que no alcanza para entregar una centena á cada una de las 235 personas. Luego, la segunda cifra del cociente será 0, que colocaremos á la derecha de la cifra 2 hallada antes, para que los millares y decenas ocupen el lugar correspondiente.

Para determinar la 3ª. cifra del cociente, observaremos que las 135 centenas que tenemos y que no alcanzaron para entregar una unidad de este orden á cada una de las 235 personas entre quienes se quiere repartir, son equivalentes á 1350 decenas, y más 6 que hay en el dividendo total, son 1356, que constituyen el 3er. dividendo parcial, cuyas 1356 decenas distribuidas entre las 235 personas, les corresponde á cada una 5. Luego, 5 será la tercera cifra del cociente, ó sea la de las decenas la cual se escribe en el cociente, á la derecha del 0 hallado anteriormente.

Solo nos falta ahora determinar la última cifra del cociente, ó sea la de las unidades simples, para lo cual multiplicaremos la cifra 5 de las decenas del cociente, por el divisor 235; su producto 1175 lo restaremos del 3er. dividendo parcial 1356, para conocer la diferencia 181 que son las decenas que han sobrado, las cuales equivalen á 1810 unidades, y más 9 que hay en el dividendo total son 1819 unidades que nos quedan para dividir entre 235. Así pues, 1819 es el 4º. dividendo parcial, cuyo número repartido entre las 235 personas les toca á cada una 7 unidades, con lo cual repartiremos 7×235, ó sean 1645 unidades hasta 1819 qué tenemos, sobran 174. Luego 7 es la cifra de las unidades simples del cociente y 174 es el residuo final.

96. Del procedimiento empleado en los ejemplos anteriores, qué es aplicable á otro cualquier caso deducimos la siguiente regla.

Para dividir un número entero compuesto de varias cifras, por otro de las mismas condiciones, se separan de la izquierda del dividendo las cifras necesarias para obtener un número igual ó mayor que el divisor, pero menor diez veces de su valor.

Las cifras asi separadas del dividendo total, forman el primer dividendo parcial, que dividido por el divisor, da la cifra de orden superior del cociente.

Se multiplica esta cifra del cociente por el divisor, y el producto se resta del primer dividendo parcial. A la derecha del resto se baja la cifra que sigue inmediatamente al primer dividendo parcial y el número asi obtenido forma el segundo dividendo parcial: se divide por el divisor, y la cifra que resulte es la segunda del cociente. Se multiplica el divisor por esta segunda cifra del cociente y el producto se resta del segundo dividendo parcial. A la derecha del resto se pone la cifra siguiente del dividinedo total; el número asi formado es el tercer dividendo parcial, que se divide por el divisor, y da la tercera cifra del cociente. Se continúa de la misma manera hasta que se hayan bajado las cifras del dividendo total.

Si colocada à la derecha de un resto la cifra que se baja del dividendo total, formase un número menor que el divisor, se pone 0 en el cociente y se baja la cifra siguiente del dividendo, formándose asi un nuevo dividendo parcial que se dividirá por el divisor.

Dividir, por ejemplo. 523802 por 625

Dividendo	523802	625	*Divisor*
625×8	5000	838	*Cociente*
2°. dividendo parcial	2380		
625×3	1875		
3er. dividendo parcial	5052		
625×8	5000		
	52	Residuo	

Se empieza la operación por separar las cuatro cifras de la izquierda del dividendo total, porque las tres primeras forman un número menor que el divisor y digo:

625×7=4375 menor que 5238;
625×8=5000 menor que 5238;
625×9=5625 mayor que 5238;

Luego, el divisor 625 no está contenido en el primer dividendo parcial 5238 más que 8 veces; por consiguiente, la primera cifra del cociente es 8; escribo dicha cifra en el cociente y el producto 5000, de la cifra 8 por el divisor, lo escribo debajo del primer dividendo parcial para efectuar la resta; al lado de la diferencia 238 se baja la siguiente cifra del dividendo, formándose el número 2380, que es el segundo dividendo parcial.

Ahora se divide este segundo dividendo parcial por el divisor y como:

625×3=1875 menor que 2380;
625×4=2500 mayor que 2380;

vemos que la segunda cifra del cociente es 3.

El producto 1875, de la cifra 3 por el divisor, se coloca debajo del segundo dividendo parcial para restarlo de él; al lado de la diferencia 505 se baja la última cifra del dividendo, con lo que se forma el número 5052, que es el tercer dividendo parcial.

Se divide el último dividendo parcial por el divisor y como:

625×8=5000 menor que 5052;
625×9=5625 mayor que 5052;

resulta que la tercera cifra del cociente es 8.

El producto 5000 de la última cifra 8 del cociente por el divisor, se coloca debajo del último dividendo parcial 5052; y la diferencia 52 es el resíduo final de la operación. De modo que el cociente entero es 838 y el resíduo 52.

Observaciones

97. 1.° No hay necesidad de escribir debajo del dividendo el producto del divisor por el cociente, pues puede efectuarse simultáneamente la multiplicación y la resta, hallando la diferencia entre el producto de cada cifra del cociente por cada una del divisor y su correspondiente del dividendo, aumentada con un número suficiente de unidades del órden inmediato superior, si es necesario para que la sustracción sea posible, cuyo número de unidades las guardamos mentalmente para agregarlas al producto parcial siguiente, á fin de que el resto no sufra alteración **(54)**.

2.° En las divisiones de números muy grandes en que el cociente deba tener muchas cifras, es conveniente, antes de empezar la operación, formar los productos del divisor por 1, 2, 3 .... hasta 9, y así la simple inspección de estos productos nos hará conocer cada cifra del cociente.

98. Ejemplo. Divídase 384364906 por 43685.

Productos del divisor

Por	1	43685
»	2	87370
»	3	131055
»	4	174740
»	5	218425
»	6	262110
»	7	305795
»	8	349480
»	9	393165

Dividendo	384364906	43685	*Divisor*
	348849	8798	*Cociente*
	430540		
	373756		
	24276	*Residuo*	

Se separan con un punto las seis primeras cifras de la izquierda del dividendo, porque con las primeras cinco no alcanzamos á formar un número igual ó mayor que el divisor; por consiguiente, el primer dividendo parcial es 384364, cuyo número, comparado con los productos prèviamente formados, observamos que se halla comprendido entre los productos del divisor por 8 y por 9. Luego, la primera cifra del cociente es 8. Réstase del dividendo parcial dicho producto y al lado de la diferencia 34884 bájase la cifra 9, con lo que tendremos formado el segundo dividendo parcial de 348849, que comparado con los productos del divisor, observamos que el próximo menor es el correspondiente al factor 7. Así pues, 7 será la segunda cifra del cociente. Réstase el producto 305795 del segundo dividendo parcial y después de bajada

la siguiente cifra del dividendo total, obtendremos el tercer dividendo parcial de 430540, que comparado con los productos del divisor, vemos que el inmediato inferior es el correspondiente al factor 9. Luego, la tercera cifra del cociente es 9. Réstase el producto 393165, del tercer dividendo parcial; al lado de la diferencia bájase la última cifra del dividendo total, con lo que habremos formado el cuarto dividendo parcial de 373756, que comparado con los productos del divisor, nos da como última cifra del cociente, 8. Réstase el producto 349480, del último dividendo y obtendremos la diferencia 24276, que es el residuo final, siendo 8798 el cociente entero.

99. El procedimiento que acabamos de indicar para determinar cada cifra del cociente, aunque seguro, no es sin embargo el mas expédito. Cuando se ha adquirido ya alguna práctica en la operación se usa con más ventaja el que á continuación damos á conocer.

Divídase 373551 por 496.

Dividendo	373551	496	*Divisor*
	2635	753	*Cociente*
	1551		
	63 *Residuo*		

El primer dividendo parcial lo deben formar las cuatro primeras cifras de la izquierda del dividendo total, es decir, el número 3735; ahora observemos que el producto de la cifra del cociente que vamos á determinar, por las 4 centenas del divisor, es un número exacto de centenas, que debe hallarse en las 37 centenas del primer dividendo parcial. Luego dividiendo las 37 centenas de

dicho dividendo por las 4 del divisor, obtendremos la primera cifra del cociente ó un número mayor que ella, puesto que en las 37 centenas del dividendo puede haber también algunas que provengan de la multiplicación de las decenas y unidades del divisor por la cifra del cociente que se trata de hallar y del resto de esta división si no da cociente exacto.

Para asegurarse de si la cifra así obtenida es mayor que la verdadera, se multiplica por todo el divisor, y si el producto puede restarse del dividendo, será la verdadera, y sino, se le rebaja una unidad y se ensaya esta nueva cifra, continuándose así hasta que la sustracción pueda verificarse.

100. Para abreviar estos tanteos, la multiplicación se empieza por las unidades de órden superior del divisor, restando este producto de la cifra de orden superior del dividendo parcial, ó de las dos primeras cifras si este tuviese una más que el divisor; luego se multiplica la cifra del cociente, por la del divisor de órden inferior inmediato á la primera, y este producto se resta de la cifra de igual orden del dividendo parcial, precedida del resto anterior, si lo hubo, y así se continúa hasta haber restado el producto del cociente por las unidades simples del divisor, del resto penúltimo con la última cifra del dividendo parcial á su derecha.

Así digo: 37 entre 4, á 9; 9 por 4 son 36, á 37 sobra 1; este resto unido á la cifra siguiente, formo 13; 9 por 9, son 81, que no puede restarse de 13; luego, la cifra 9 es mayor que la verdadera. Le rebajo una unidad, y continúo: 8 por 4, son 32, á 37 van 5; este resto, unido á la cifra siguiente, forma 53; 8 por 9, son 72 que tampoco puede restarse de 53; luego la cifra 8 es todavia mayor que la verdadera. Se rebaja otra unidad y

tendremos; 7 por 4 son 28 á 37 van 9; este resto unido á la cifra siguiente forma 93; 7 por 9 son 63 que restado de 93 sobran 30; este resto unido á la cifra siguiente componen 305; 7 por 6 son 42 que puede restarse de 305 y sobran 263; luego 7 es la primera cifra del cociente y 263 el primer resíduo.

Observase que tan pronto como se obtenga en una sustracción, que se principia por las unidades de orden superior, un resto igual ó mayor que la cifra que se ensaya, puede asegurarse que dicha cifra no es mayor que la verdadera.

Por ejemplo, al tantear la cifra 7 dije: 7 por 4 son 28, á 37 van 9; este resto, aunque solo fuese 7, unido á las dos cifras siguientes del dividendo parcial formaría á lo menos el número 700, que siempre será mayor que el producto que puede resultar de multiplicar la cifra que se ensaya por las otras dos del divisor, pues en el caso más desfavorable podrían ser dos nueves, y su producto sería $99 \times 7 = 693$, número menor que 700. Luego, el producto del cociente por el divisor, puede restarse del dividendo parcial; por consiguiente la cifra 7 que se ensaya es la verdadera. Una vez obtenida la verdadera cifra del cociente, la sustracción del producto de ésta por el divisor, del dividendo parcial, debe hacerse principiando por las unidades sencillas, para no tener que hacer de memoria sustracciones difíciles.

Para hallar la segunda cifra del cociente, empezaré por bajar la siguiente cifra 5 del dividendo total, la que colocada á la derecha del resíduo anterior, formará el segundo dividendo parcial de 2635. Siendo siempre 496 el divisor, continuaré la operación así; 26 entre 4, á 6; 6 por 4, son 24, que

restado de 26 sobran 2; este resto con la cifra siguiente forma 23; 6 por 9 son 54 que no puede restarse de 23, luego la cifra 6 es grande; le rebajo una unidad, y digo: 5 por 4, son 20, á 26 van 6; número mayor que la cifra que se tantea; luego, dicha cifra 5 es la verdadera, por tanto la coloco en el cociente á la derecha de la cifra 7 que hallamos primeramente y multiplico esta última cifra hallada por el divisor, empezando por las unidades simples y simultáneamente hago la sustracción de este producto, del segundo dividendo parcial, como se aconsejó en el número **97** observación 1ª. Así digo: 5 por 6, son 30, que no puede restarse de las 5 unidades del dividendo parcial, por lo que añadiré á esta cifra 3 decenas, y restaré el producto 30 de estas 35 unidades, quedando 5 de resto. Ahora; 5 por 9, son 45, y más 3 que añadí antes al minuendo (**54**), forman 48 que no pueden restarse de 3, por lo que le agregaré 5 unidades superiores formando así 53, y restando el producto 48, tendremos 5 de diferencia; 5 por 4, son 20, y 5 que debo añadir, por haberlas añadido antes al minuendo, forman 25, que, restado de 26, sobra 1. Así pues, el segundo resto parcial es de 155, y bajando la última cifra del dividendo se obtendrá el tercer dividendo parcial de 1551, y digo: 15 entre 4, á 3; 3 por 4, son 12, á 15 van 3; número igual á la cifra que se ensaya; luego dicha cifra es la verdadera. La coloco en el cociente á la derecha del 5, y multiplico el divisor por ella, restando el producto del último dividendo parcial, como se ha hecho con la cifra anterior, de este modo: 3 por 6, son 18, que no puede restarse de 1, por tanto le agrego 2 decenas que forman 21 y restando el producto 18 que-

dan 3 de resto; 3 por 9, son 27, y 2 que debo añadir por haberlas añadido antes al minuendo, forman 29 que no se puede restar de 5, por lo que le agregaré 3 unidades superiores y formaré 35, y sustrayéndole el producto 29, quedan 6 de resto; 3 por 4, son 12, y 3 que debo añadir por haberlas añadido antes al minuendo, forman 15 que restado de las 15 centenas del último dividendo no queda ninguna.

Dividiendo, pues, 373551 por 496 hemos hallado 753 de cociente entero y 63 de residuo.

101. Puede también comprobarse el cociente de un modo más sencillo pero no tan seguro, sin embarho, es el que más generalmente se usa.

Ejemplo: Divídase 63804 por 752.

63804	752
3644	84
636	

Consiste el método que vamos á explicar, en probar el cociente solamente respecto de las dos ó tres primeras cifras de la izquierda del dividendo.

Así, 63 entre 7 á 9 para ensayar la cifra 9 emplearé solamente las dos cifras de orden superior del divisor: digo 9 por 5 son 45; restando el producto 45 de 48 del dividendo parcial sobran 3 y se llevan 4; 9 por 7, son 63 y 4 que llevaba son 67, que no puedo restar de 63 que hay en el dividendo, luego la cifra 9 es demasiado alta. Le rebajo una unidad y digo: 8 por 5, son 40, á 48, van 8 y llevo 4; 8 por 7, son 56 y 4, 60 que restado de 63 sobran 3, de modo que la cifra 8 es la verdadera; la escribo en el cociente y la multiplico ahora

por todo el divisor, restando al mismo tiempo este producto del primer dividendo parcial, diciendo:

8 por 2, 16, á 20 van 4, y llevo 2; 8 por 5, 40, y 2, 42, á 48 van 6 y llevo 4; 8 por 7, 56, y 4 60, á 63 van 3; el primer residuo es 364, que, escribiéndole á la derecha la siguiente cifra del dividendo total, tendremos el segundo dividendo parcial de 3644.

Para hallar la segunda cifra del cociente, digo: 36 entre 7, á 5; para comprobar esta cifra, lo mismo que la primera, la multiplicaré por las dos de orden superior del divisor y restaré estos productos de las cifras correspondientes del dividendo parcial; así, 5 por 5, son 25, á 34 van 9, y llevo 3; 5 por 7, son 35, y 3 que llevaba 38 que no puede restarse de 36; así pues, la cifra 5 es demasiado alta; le rebajo una unidad, y digo: 4 por 5, son 20, á 24 van 4 y llevo 2: 4 por 7, son 28, y 2 que llevaba 30, á 36 van 6; luego la cifra 4 es la verdadera, porque su producto por el divisor puede restarse del dividendo.

Escribo la cifra 4 en el cociente y la multiplico por todo el divisor restando su producto del segundo dividendo parcial, diciendo: 4 por 2, 8 á 14 van 6, y llevo 1; 4 por 5, 20, y 1, 21, á 24 van 3, y llevo 2; 4 por 7, 28, y 2, 30, á 36 van 6.

Por último vemos que el cociente entero que resulta de dividir el número 63804 por 752 es 84 y el residuo 636.

OTROS EJEMPLOS

404444922	5943
47864	68054
32092	
23772	
0000	

```
1482666608 | 4563
 11376     |-------
  22506    | 324932
   42546
    14790
     11018
      1892
```

263436288 : 42877=6144

2148004848 : 128132=16764

4352491876 : 95396=45625 y 49576 de residuo.

931809099 : 63518=14670 y 39 de residuo.

102. TEOREMA.—*Para dividir una suma indicada por un número entero, se dividen todos los sumandos por dicho número, y la suma de los cocientes parciales será el cociente total.*

En efecto, (4+3+5): 2 digo que es igual á 4:2+3:2+5:2, porque este cociente multiplicado por el divisor 2 produce el dividendo 4+3+5. Así: (4:2+3:2+5:2)×2=4+3+5 (**69**).

103. TEOREMA *Para dividir una diferencia indicada, por un número entero, se dividen el minuendo y el sustraendo por dicho número, y la diferencia de los cocientes parciales, será el cociente pedido.*

En efecto, (7—4):2 digo que es igual á 7:2—4:2, porque este cociente multiplicado por el divisor 2 produce el dividendo 7—4.

Así: (7:2—4:2)×2=7—4 (**70**).

104. TEOREMA *Para dividir un producto compuesto de dos ó más factores enteros por un divisor de cualquiera de éstos, basta dividir el factor que da cociente exacto por el divisor y el cociente que resulte multiplicarlo por los otros factores.*

Por ejemplo, para dividir 12.45.37 por 5, digo que basta dividir 45 por 5 y el cociente 9 multiplicarlo por 12 y por 37.

En efecto, el cociente 9.12.37 multiplicado por el divisor 5, produce el dividendo 12.45. 37, que es el producto dado, porque se ha visto **(72)**, que

$$9 . 12 . 37 . 5 = 12 . 9 . 5 . 37 = 12 . 45 . 37,$$

luego pues,el cociente hallado, 9.12.37, es el verdadero.

105. COROLARIO *Para dividir un número terminado en ceros, por 10, 100, 1000, etc., basta suprimir á la derecha del dividendo tantos ceros como acompañen á la unidad* **(29**—4.ª)

Por ejemplo el cociente de 5670000 : 1000 será igual á 5670. 48000000 : 1000000=48

106. TEOREMA *Si se divide el dividendo y el divisor de una división inexacta, por un número entero cualquiera, el cociente entero no varía, pero el residuo queda dividido por el mismo número.*

Siendo 69 el dividendo y 9 el divisor, el cociente entero será 7 y el residuo 6: luego tendremos:

$$69 = 7 . 9 + 6$$

Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por 3, la igualdad no se altera, porque hay un

axioma (*) que dice, *si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados que se obtengan son iguales,* luego:

69 : 3=7. 9 : 3+6 : 3

donde se observa que el nuevo divisor 9 : 3 está contenido en el nuevo dividendo 69 : 3, 7 veces, como antes lo estaba el 9 en el 69; pero el resíduo 6, aparece dividido por 3, conforme con el enunciado del teorema.

De igual modo demostraríamos que: *si se multiplica el dividendo y el divisor de una división inexacta, por un número entero cualquiera, el cociente entero no varía, pero el residuo queda multiplicado por el mismo número.*

COROLARIO. *Un cociente de división exacta no se altera dividiendo dividendo y divisor por un divisor de ambos.*

Así. 448 : 64=112 : 16, dividiendo ambos términos por 4.

107. El teorema que acabamos de demostrar nos facilita el medio de simplificar la división en el caso de que el dividendo y divisor terminen en ceros, pues en tal caso se suprimen á la derecha de cada uno de ellos, tantos ceros cuantos haya en el que menos tenga, practicándose la división con los números restantes.

Por ejemplo divídase 108000 por 4500

1080	45
180	24
00	

(*) Se llama AXIOMA á un principio ó verdad evidente por sí mismo que basta enunciarlo para convencerse que es verdad.

Se suprimen dos ceros en el dividendo y dos en el divisor, lo que equivale á dividir por 100 el dividendo y el divisor, que según acabamos de ver no altera el cociente entero. Por consiguiente, la división propuesta queda reducida á dividir 1080 por 45 obteniéndose por cociente exacto 24.

Si la división fuese inexacta procederíamos de igual manera, pero tendríamos el cuidado de agregar á la derecha del resíduo tantos ceros cuantos se hubiesen suprimido en el dividendo (**29**—4°). para conocer su verdadero valor pues de lo contrario el resíduo quedaría dividido por el mismo número en que se hubiese dividido el dividendo y divisor (**106**).

108. CONSECUENCIAS que se deducen de la división de los números enteros.

1.ª *Aumentando ó disminuyendo el dividendo*, aumentará ó disminuirá el *cociente*.

Porque siendo mayor ó menor el número de unidades, que por ejemplo, se reparten entre el mismo número de personas, les tocará más ó ménos á cada una.

2.ª *Aumentando ó disminuyendo el divisor*, disminuirá ó aumentará el *cociente*

Porque en el primer caso siendo mayor el número de partes que han de hacerse, cada una tendrá que ser más pequeña y viceversa.

3.ª *Multiplicando el dividendo por un número cualquiera o dividiéndole por uno de sus factores*, el cociente quedará multiplicado ó dividido por el mismo número.

Porque haciendo el dividendo 2, 3, 4..... etc., veces mayor y dejando el mismo divisor, habrá 2, 3, 4..... etc., veces mayor número de unidades para dividir en

igual número de partes, luego cada parte será también 2, 3, 4..... etc. veces mayor, y recíprocamente.

4.ª Multiplicando el divisor por un número entero cualquiera ó dividiéndolo por uno de sus factores, el cociente quedará dividido ó multiplicado por el mismo número.

Porque haciendo el divisor 2, 3, 4,........ etc., veces mayor, y siendo el mismo el número de unidades que hay para dividir, resultará que teniéndose que hacer 2, 3, 4,....... etc., veces mayor número de partes será cada una de ellas 2, 3, 4....... etc., veces menor, y viceversa.

109. Prueba de la división. Esta operación se comprueba multiplicando el cociente entero por el divisor y al producto se añade el residuo; la suma debe ser igual al dividendo **(87)**.

110. Usos de la división. Se emplea la división cuando se trata:

1.º De hallar cuantas veces un número entero contiene á otro.

2.º De dividir un número dado en cierto número de partes iguales.

3.º De hacer un número tantas veces menor como unidades tiene otro.

4.º De hallar el valor de una parte del número dividido en porciones iguales.

5.º De conocer un factor, conocido el producto de dos factores y uno de ellos.

En muchos otros casos se emplea la división: los que se han citado son los principales.

PROBLEMAS

1.º Un capitalista ha pagado 35292 pesos por

un terreno compuesto de 519 hectáreas: ¿Cuánto le cuesta la hectárea?

Operación		Prueba
35292	519	519
4152	68	68
000		4152
		3114
		35292

Lo que cuesta la hectárea multiplicado por 519 que son el número de hectáreas compradas, debe producir el número 35292, luego este número es el producto de otros dos, de los cuales uno es 519 y el otro es el precio de la hectárea, cuyo valor hallaremos fácilmente dividiendo dicho producto por el factor conocido, que es precisamente lo que hemos hecho, y así se ha encontrado que cada hectárea de terreno cuenta 68 pesos.

2.° Se han distribuido 27024 naranjas entre 563 soldados, ¿cuántas naranjas le correspondió á cada uno?

27024	563
4504	48
000	

Le correspondió á cada soldado 48 naranjas.

3.° Un señor dispuso que á cada pobre de cierta localidad se le entregasen 358 reales para lo cual tuvo que dar 300362 reales, ¿cuál era el número de pobres?

300362	358
1396	839
3222	
000	

El número de pobres era 839.

EJERCICIOS

1.° El producto de dos números es 3111390, y 905 uno de ellos: ¿cuál es el otro?

2.° Dividir el número 86345 en dos partes, de modo que una, sea 4 veces mayor que la otra.

3.° Dos sócios tienen que repartirse 40482 pesos de ganancia que han tenido en un negocio, en el cual, uno empleó 3879 pesos y el otro 9615: ¿cuánto les toca á cada uno?

4.° Un estanciero ganó el primer año que invernó ganados en un potrero que tiene en su campo, 2315 pesos, y sucesivamente en los 11 años siguientes que hizo el mismo negocio ganó respectivamente 1836, 3008, 2609, 815, 1794, 2800, 2412, 2326, 1981. 2913 y 2647; ¿cuánto ganó término medio por año?

5.° Un comerciante tiene harina de dos clases una de 132 centésimos los 10 kilógramos y otra de 88: si mezcla cantidades iguales de las dos clases ¿á que precio tendrá que vender los 10 kilógramos de harina para ganar en cada kilógramo un centésimo?

6.° ¿Cuál es el número que multiplicado por 126 y dividido por 54 da de cociente 63?

7.° Se han pagado 5040 pesos por una partida de vinos tintos de tres clases distintas; unos valen 24 pesos el hectolitro, otros 21 y otros 16. Habiéndose invertido en cada clase igual número

de pesos: ¿cuántos hectolitros de vino de cada precio se compraron?

8.° Un padre dejó 18870 pesos para que se repartieran entre sus cinco hijos, de modo que el mayor reciba el doble que cada uno de los otros, ¿cuánto le tocó á cada uno?

9.° Un ingeniero gana anualmente 8395 pesos dirijiendo varias obras importantes y quiere reservar 15 pesos diarios como ahorro: cuánto le sobrará para gastar diariamente, teniendo el año 365 dias?

10.° El director de un Instituto recibe mensualmente 1610 pesos como retribución para instruir á 215 discípulos, de los cuales 150 hacen estudios elementales y pagan 4 pesos cada uno, 40 estudian el primer año del bachillerato y pagan 14 pesos, el resto estudian segundo año. Se desea saber cuánto paga cada uno de estos últimos.

11.° Un molinero ha pagado 231936 centésimos por fletes de 1208 sacos de trigo, que cada uno pesaba 64 kilogramos; ¿que flete tendria que pagar por 2394 sacos de trigo, que cada uno pesase 93 kilogramos?

12.ª Se han empleado 3920 pesos en pagar jornales á cierto número de peones durante 245 dias, ganando cada uno 2 pesos diarios ¿cuántos eran los peones y cuánto se hubiese gastado si la obra hubiera durado 54 dias más?

13.° Un ganadero tiene 245 caballos de raza finos, traidos de Europa, los cuales le costaron en Londres 85 pesos cada uno. Pagó 5800 pesos por fletes y además entre comisiones y derechos de aduana ha pagado 2040 pesos ¿A que precio tendrá que venderlos para ganar 15 pesos en cada caballo?

14.° Un capitalista al morir dejó 27456 pesos

en un Banco, en otro dejó 1948 pesos menos que en el primero, y en un tercer Banco dejó 8609 menos que en el segundo. Además dejó 3720 pesos en poder de un amigo, y en caja tenía 18367 pesos. Disponiendo en su testamento, que la mitad de ese capital se invertiese en la instalación y sostenimiento de un colegio de primera enseñanza y el resto que se distribuyese en partes iguales entre los 485 niños que se están instruyendo en la Escuela de Artes y Oficios de Montevideo; ¿cuánto les tocó á cada uno?

15º Un maestro compositor de música recibió por un concierto que dió para estrenar una composición suya, 15552 pesos, los cuales debían ser distribuidos así: una tercera parte para él, como compositor y director, otra tercera parte para los coristas y el resto para los profesores de la orquesta. El coro se componía de 216 personas y les tocó á cada una 12 pesos menos que á los que componían la orquesta. ¿Cuántos eran los profesores que componían la orquesta y cuánto les tocó á cada uno?

LECCIÓN IX

Quebrados

111. Ya hemos dicho en el número **6**, que se llama *número quebrado* al que representa una ó varias porciones de la unidad dividida en partes iguales.

Si dividimos una naranja en cinco partes iguales, cada una de estas partes será *un quinto* de

naranja; si tomamos tres porciones de las cinco que hicimos, tendremos *tres quintos* de naranja.

Los números quebrados se llama también números *fraccionarios*, y se dividen en *ordinarios* ó *comunes* y *decimales*. Los primeros, representan la unidad dividida en un número cualquiera de partes iguales; los segundos, representan solamente porciones de la unidad dividida, precisamente, en diez partes iguales ó en cualquier múltiplo exacto de diez.

Los números fraccionarios *decimales*, son, pues, un caso particular de los ordinarios.

A los números fraccionarios ordinarios en general, se les da simplemente el nombre de *quebrados*.

Un quebrado ordinario se representa por dos números separados por una raya: escribiéndose uno encima y otro debajo, así: $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, y se lée *un quinto, tres quintos*.

El número que está encima se llama ***numerador***, el que está debajo ***denominador*** y ambos se llaman ***términos del quebrado***.

El *denominador* expresa el número de partes en que se considera dividida la unidad, y el *numerador*, indica cuantas de aquellas partes contiene el quebrado.

Para enunciar un número quebrado, se enuncia primeramente el numerador como si fuese entero, luego el denominador agregando á este la terminación *avos* si pasa de 10, y si fuese menor que 10 se hace uso de los números partitivos.

Los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{25}{138}$, $\frac{75}{364}$,

se leen respectivamente *un medio, dos tercios, tres cuartos, cuatro quintos, seis sèptimos, siete octavos, ocho novenos, nueve dècimos, ocho treceavos, veinticinco ciento treinta y ochoavos, setenta y cinco trescientos sesenta y cuatroavos;* $\frac{1}{2}$ expresa que la unidad se ha dividido en dos partes iguales, de las cuales se ha tomado una sola; $\frac{2}{3}$ indica que la unidad se ha dividido en tres partes iguales, de las cuales se han tomado dos; $\frac{3}{4}$ representa la unidad dividida en cuatro partes iguales y de ellas tomadas tres; $\frac{8}{13}$ expresa que la unidad se ha dividido en trece partes iguales y que de ellas se han tomado ocho; $\frac{25}{138}$ indicn que la unidad se ha dividido en ciento treinta y ocho partes iguales y que se han tomado de estas veinte y cinco; y por último, $\frac{75}{364}$ quiere decir que la unidad se considera dividida en trescientas sesenta y cuatro partes iguales y que de estas se han tomado setenta y cinco.

112. En los quebrados puede ocurrir que el numerador sea menor, igual ó mayor que el denominador; en el primer caso se llaman *propios* en el segundo algunos les llaman *aparentes*, pero

verdaderamente deben llamarse *impropios* lo mismo que los del tercer caso.

EJEMPLOS

$\frac{3}{5}$, $\frac{25}{36}$, $\frac{136}{495}$, etc. son quebrados *propios.*

$\frac{6}{6}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{34}{34}$, etc. son los llamados *aparentes.*

$\frac{36}{8}$, $\frac{25}{9}$, $\frac{45}{24}$, etc. son quebrados *impropios.*

Los quebrados *propios* valen menos que la unidad, como por ejemplo $\frac{4}{5}$; porque como se ha dicho antes $\frac{4}{5}$, quiere decir que la unidad se ha dividido en 5 partes iguales, de las cuales solo se han tomado 4, es decir, menos de la unidad.

Los quebrados llamados *aparentes*, representan la unidad como $\frac{9}{9}$, que expresa haberse dividido la unidad en 9 partes iguales y tomadas todas, luego se toma la unidad.

Los quebrados *impropios* valen más que la unidad por ejemplo $\frac{9}{5}$, el cual indica que la unidad

se ha dividido en 5 partes iguales de las cuales se toman 9, es decir, que se han tomado las 5 que componen la unidad y otras 4 mas de otra unidad así pues, el quebrado $\frac{9}{5}$ vale más que dicha unidad, por cuya razón se llama *impropio.*

113. TEOREMA *El cociente de una división indicada puede expresarse por un quebrado que tenga por numerador el dividendo y por denominador el divisor.*

Digo que $17 : 5$ es igual á $\frac{17}{5}$.

Dividir 17 por 5, es hacer del 17 cinco partes iguales, de modo que cada una de estas partes valdrá la quinta parte de 17; la quinta parte de uno, es $\frac{1}{5}$, luego la quinta parte de 17 será $\frac{17}{5}$, así pues, $17 : 5 = \frac{17}{5}$.

114. COCIENTE COMPLETO. En toda división inexacta se puede completar el *cociente entero,* agregándole un quebrado que tenga por numerador el resíduo y por denominador el divisor.

Por ejemplo el *cociente completo* de $29 : 6$ es $4 + \frac{5}{6}$; en efecto, el cociente entero de $29 : 6$ es 4 y el resíduo 5, el cual debe dividirse por 6, y según acabamos de demostrar en el teorema anterior, $5 : 6$ es lo mismo que $\frac{5}{6}$; por consiguiente,

el cociente completo de 29:6, es igual á $4+\frac{5}{6}$.

115. *Para sacar los enteros que contiene un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador.*

Por ejemplo: $\frac{36}{9}=4$; $\frac{37}{5}=7+\frac{2}{5}$. **(113)**

116. Recíprocamente; *para reducir un número mixto á quebrado impropio, se multiplica el número entero por el denominador del quebrado; á ese producto se le agrega el numerador, y al resultado se le pone por denominador el mismo del quebrado.*

Por ejemplo: $3\frac{4}{5}$ digo que es igual á

$$\frac{3\times5+4}{5}=\frac{19}{5},$$

porque la unidad vale $\frac{5}{5}$; luego 3 unidades valdrán 3 veces $\frac{5}{5}$, ó sean $\frac{15}{5}$ y más $\frac{4}{5}$, que vale el quebrado, forman $\frac{19}{5}$.

117. *Todo número entero pueda ponerse en forma de quebrado, poniéndole por denominador la unidad.*

Así $8 = \dfrac{8}{1}$; $15 = \dfrac{15}{1}$; porque todo número dividido por la unidad es igual al mismo número, y ya hemos visto (**113**) que un quebrado no es más que una división indicada.

118. *También puede ponerse un número entero en forma de quebrado, poniéndole por denominador un número cualquiera y por numerador el producto del número dado por el denominador elegido.*

Por ejemplo: $5 = \dfrac{5 \times 7}{7}$; $8 = \dfrac{8 \times 3}{3}$:

Porque un número no cambia de valor multiplicándolo y dividiéndolo al mismo tiempo por otro cualquiera.

119. *Si dos ó más quebrados tienen un mismo denominador, será mayor el que tenga mayor numerador.*

Veamos; los quebrados $\dfrac{4}{7}$, $\dfrac{6}{7}$, $\dfrac{3}{7}$, tienen por denominador el número 7, que quiere decir que la unidad se ha dividido en todos ellos en 7 partes iguales; los numeradores 4, 6 y 3, indican que en el primer quebrado se toman 4 de estas siete partes, en el segundo 6, y en el último solo 3; luego es evidente que el quebrado $\dfrac{6}{7}$ es el mayor porque se han tomado más partes que en cualquiera de los otros dos.

120. *Si dos ó más quebrados tienen iguales*

los numeradores, será mayor el que tenga menor denominador.

Sean por ejemplo los quebrados $\frac{4}{9}$ y $\frac{4}{5}$; en el quebrado $\frac{4}{9}$ la unidad está dividida en 9 partes iguales de las cuales se toman 4; en el quebrado $\frac{4}{5}$, está dividida la unidad en solo 5 partes y también se toman 4; pero $\frac{1}{5}$ de unidad expresa mayor porción de ella que $\frac{1}{9}$; luego $\frac{4}{5}$ es mayor que $\frac{4}{9}$.

LECCIÒN X

Otras propiedades de los quebrados

121. TEOREMA. *Si el numerador de un quebrado se multiplica ó divide por cualquier número entero, el qnebrado quedará multiplicado ó dividido por el mismo número.*

El quebrado $\frac{6}{7}$ por ejemplo, si se multiplica el numerador 6 por 2 se trasformará en $\frac{12}{7}$ que es evi-

dentemente 2 veces mayor que $\frac{6}{7}$, pues ambos se refieren á séptimas partes de la unidad; pero en uno se toman solo 6 de estas partes mientras que en el otro se toman 12, ó sea 2 veces más.

Del mismo modo demostraríamos que dividiendo el numerador 6 por 2, el quebrado $\frac{3}{7}$ que resultaria, es la mitad del propuesto $\frac{6}{7}$.

122. TEOREMA. ***Si se multiplica ó divide el denominador de un quebrado por un número entero cualquiera, el quebrado quedará dividido en el primer caso, y multiplicado en el segundo por ese mismo número.***

Sea el quebrado $\frac{5}{8}$: si se multiplica el denominador por 2 se tendrá $\frac{5}{16}$ que es la mitad de $\frac{5}{8}$, porque el número de partes que se toman, es el mismo en los dos quebrados, pero $\frac{1}{16}$ es la mitad de $\frac{1}{8}$ pues representa una parte de la unidad dos veces mas pequeña; luego tambien $\frac{5}{16}$

será la mitad de $\frac{5}{8}$. Es decir, que multiplicando el denominador de un quebrado por un número entero, vemos que el quebrado queda dividido por dicho número.

Si dividimos por 2 el denominador del mismo quebrado propuesto, obtendremos $\frac{5}{4}$ que es 2 veces mayor que $\frac{5}{8}$, lo cual se demuestra de un módo análogo al caso anterior; luego dividiendo el denominodor por un número entero cualquiera el quebrado queda multiplicado por ese número.

123. TEOREMA. *El valor de un quebrado no se altera, cuando se multiplican ó dividen sus dos tèrminos por el mismo número.*

Digo que $\frac{5}{7}$ es igual á $\frac{5\times4}{7\times4}$.

En efecto: al multiplicar el numerador 5 por el número 4, se ha hecho el quebrado 4 veces mayor **(121)**; al multiplicar el denominador 7 por 4, se hace el quebrado 4 veces menor **(122)**. Luego, en resúmen, el quebrado no se ha alterado, porque por una parte se hace tantas veces mayor, cuantas veces menor se hace por la otra; así pues $\frac{5}{7}=\frac{5\times4}{7\times4}=\frac{20}{28}$.

Del mismo modo demostraríamos que dividien-

do los dos términos del quebrado $\frac{14}{35}$ por 7, el quebrado $\frac{14:7}{35:7}$ que resultaría tendría el mismo valor que el primero es decir que:

$$\frac{14}{35} = \frac{14:7}{35:7} = \frac{2}{5}$$

OBSERVACIÓN. Según se ha demostrado en el número **113** el cociente de una división indicada, puede expresarse por un quebrado. Así pues, un quebrado no es más que una división indicada en que el numerador es el dividendo y el denominador el divisor; luego todo cuanto acabamos de demostrar respecto de los quebrados es también aplicable á la teoría de la división cuyos principios pueden enunciarse de este modo:

1.° *Si se multiplica el dividendo por un número entero, el cociente queda multiplicado por el mismo número.*

2.° *Si el dividendo se divide por uno de sus divisores, el cociente queda dividido por el mismo divisor.*

3.° *Si se multiplica el divisor por un número entero, el cociente queda dividido por el mismo número.*

4.° *Si se divide el divisor por uno de sus factores, el cociente quedará multiplicado por el mismo número.*

5.° *Si se multiplican ó dividen, dividendo y*

divisor por un mismo número entero, el cociente no se altera.

124. Teorema. *Si se suma ó resta el mismo número á los términos de un quebrado propio, el quebrado aumentará en el primer caso y disninuirá en el segundo.*

Por ejemplo el quebrado $\frac{6}{11}$, al cual vamos á sumarle 5 unidades al numerador y otras tantas al denominador, de modo, que obtendremos

$$\frac{6+5}{11+5}=\frac{11}{16};$$

y digo que $\frac{11}{16}$ es mayor que $\frac{6}{11}$.

Al quebrado $\frac{6}{11}$ le faltan $\frac{5}{11}$ para volver una unidad, y al quebrado $\frac{11}{16}$ le faltan $\frac{5}{16}$ para valer también una unidad, pero $\frac{5}{11}$ es mayor que $\frac{5}{16}$; **(120).** luego, al quebrado $\frac{6}{11}$ le falta más para valer una unidad, que al quebrado $\frac{11}{16}$; por consiguiente, este último es mayor que el primero, es decir, que

$$\frac{6}{11} < \frac{6+5}{11+5} \text{ (*)}$$

del mismo modo demostraríamos que $\frac{6}{11} > \frac{6-5}{11-5}$.

Lo que se acaba de demostrar es solo cierto respecto de los quebrados propios, pues en los impropios sucede precisamente todo lo contrario; es decir, que si se suma ó resta el mismo número á los dos términos de un quebrado impropio, el valor del quebrado disminuirá en el primer caso y aumentará en el segundo.

Por ejemplo; si al quebrado $\frac{17}{9}$ se le suman 6 unidades á los dos términos, se trasformará en $\frac{23}{15}$ que digo es $< \frac{17}{9}$.

En efecto, el quebrado $\frac{17}{9}$ vale una unidad y $\frac{8}{9}$: el quebrado $\frac{23}{15}$ vale una unidad y $\frac{8}{15}$; pero $\frac{8}{9}$ es mayor que $\frac{8}{15}$ (**120**), luego también $\frac{17}{9}$

(*) El signo $<$ que acabamos de emplear se llama DESIGUALDAD, y colocado en esa posición se lee MENOR QUE y cuando se coloca invertido así $>$, se lee MAYOR QUE.

será mayor que $\frac{23}{15}$ porque sobrepasa más el valor de la unidad.

Del mismo modo demostraríamos que

$$\frac{17}{9} < \frac{17-6}{9-6}.$$

Reducción de quebrados á un común denominador

125. *Reducir quebrados á un común denominador es trasformarlos en otros equivalentes, cuyos denominadores sean todos iguales.*

Para reducir quebrados á un común denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el denominador del otro si no fuesen más que dos los quebrados, ó por el producto de los denominadores de los demás si pasasen de dos.

Así, $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{9}$ son equivalentes á $\frac{4 \times 9}{5 \times 9}$ y $\frac{2 \times 5}{9 \times 5}$ ó sean á $\frac{36}{45}$ y $\frac{10}{45}$.

En efecto: hemos visto en el número **123**, que el valor de un quebrado no se altera multiplicándo sus dos términos por el mismo número; luego el quebrado $\frac{4}{5}$ y el $\frac{4.9}{5.9} = \frac{36}{45}$, son equivalentes, lo

mismo que el quebrado $\frac{2}{9}$ y el $\frac{2.5}{9.5} = \frac{10}{45}$; pues no se ha hecho más que multiplicar los dos términos del primer quebrado $\frac{4}{5}$ por 9, ó sea por el denominador del segundo; y los dos tèrminos del segundo quebrado $\frac{2}{9}$, por 5 ó sea por el denominador del primero, cuya operación sabemos que no altera su valor: luego pues, hemos trasformado los quebrados dados $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{9}$ en otros equivalentes $\frac{36}{45}$ y $\frac{10}{45}$ que reunen la circunstancia de tener un mismo denominador, el cual es igual al producto de los denominadores de los quebrados propuestos.

Veamos ahora los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ y $\frac{7}{9}$.

Multiplicando los dos términos del primer quebrados $\frac{2}{3}$ por 5×9; los dos términos del segundo $\frac{4}{5}$ por 3×9; y los dos tèrminos del tercero $\frac{7}{9}$ por $3+5$; resultará

$$\frac{2}{3}=\frac{2.5.9}{3.5.9}=\frac{90}{135};$$

$$\frac{4}{5}=\frac{4.3.9}{5.3.9}=\frac{108}{135};\qquad \frac{7}{9}=\frac{7.3.5}{9.3.5}=\frac{105}{135}$$

Es decir que los quebrados propuestos $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ y $\frac{7}{9}$, se han trasformado respectivamente en sus equivalentes $\frac{90}{135}$, $\frac{108}{135}$ y $\frac{105}{135}$, que tienen un común denominador.

OTROS EJEMPLOS

1°. Reducir á un común denominador, los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{11}$ $\frac{8}{15}$ y $\frac{7}{9}$.

$$\frac{3}{5}=\frac{3.11.15.9}{5.11.15.9}=\frac{4455}{7425};\qquad \frac{6}{11}=\frac{6.5.15.9}{11.5.15.9}=\frac{4050}{7425};$$

$$\frac{8}{15}=\frac{8.5.11.9}{15.5.11.9}=\frac{3960}{7425};\qquad \frac{7}{9}=\frac{7.5.11.15}{9.5.11.15}=\frac{6775}{7425}$$

Los quebrados dados se transforman en $\frac{4455}{7425}$, $\frac{4050}{7425}$, $\frac{3960}{7425}$ y $\frac{6775}{7425}$ que tienen un común denominador.

2°. Los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{11}$ y $\frac{5}{9}$:

$$\frac{1}{2}=\frac{3.5.11.9}{2.3.5.11.9}=\frac{1485}{2475};\quad \frac{2}{3}=\frac{2.2.5.11.9}{3.2.5.11.9}=\frac{1980}{2475};$$

$$\frac{4}{5}=\frac{4.2.3.11.9}{5.2.3.11.9}=\frac{2376}{2475};\quad \frac{6}{11}=\frac{6.2.3.5.9}{11.2.3.5.9}=\frac{1620}{2475};$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5.2.3.5.11}{9.2.3.5.11}=\frac{1650}{2475}.$$

Luego los quebrados propuestos son equivalentes á

$$\frac{1485}{2475},\ \frac{1980}{2475},\ \frac{2376}{2475},\ \frac{1620}{2475},\ \text{y}\ \frac{1650}{2475}$$

que tienen un común denominador.

3°. Así veremos tambián que los quebrados

$$\frac{1}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{15},\ \frac{8}{13},\ \frac{1}{4}\ \text{y}\ \frac{3}{7}$$

se trasforman respectivamente en

$$\frac{13860}{81900}, \frac{54600}{81900}, \frac{38220}{81900}, \frac{50400}{81900}, \frac{20475}{81900}, \frac{35100}{81900},$$

Observación. Si los denominadores de los quebrados que se proponen para reducir á un mismo denominador tienen factores comunes, la operación puede simplificarse estudiando porque número conviene multiplicar los dos términos de cada quebrado, para que todos tengan igual denominador.

Por ejemplo: los quebrados

$$\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{15}$$

Obsérvase que si se multiplican los dos términos del primer quebrado $\frac{4}{5}$ por 6; los del segundo $\frac{1}{2}$ por 15; los del tercero $\frac{3}{10}$ por 3 y los del cuarto $\frac{7}{15}$ por 2, se transformarán respectivamente en

$$\frac{24}{30}, \frac{15}{30}, \frac{9}{30}, \frac{14}{30}$$

que son equivalentes á los primeros y tienen por común denominador al número 30 que es mucho más simple que el producto de todos los denominadores

De un modo análogo hallaremos el común denominador de los quebrados

$$\frac{7}{15},\ \frac{3}{5},\ \frac{8}{9}\ \text{y}\ \frac{13}{45}$$

En los cuales se observa que el denominador 45 es un múltiplo exacto de 15, 5 y 9, por consiguiente puede tomarse por común denominador, para lo cual bastará multiplicar los dos términos del primer quebrado $\frac{7}{15}$ por 3; los del segundo $\frac{3}{5}$ por 9, y los del tercero $\frac{8}{9}$ por 5, con lo que se convertirán en

$$\frac{21}{45},\ \frac{27}{45},\ \frac{40}{45},\ \text{y}\ \frac{13}{45}$$

cuyos quebrados son respectivamente equivalentes á los primeros y tienen un común denominador.

LECCIÓN XI

Simplificación de los quebrados

126. *Simplificar un quebrado, es trasformarle en otro equivalente, que tenga menores términos.*

127. Para simplificar un quebrado, el único medio que puede emplearse es la división de los

dos términos por un mismo número entero que los divida exactamente, con lo que no se altera el valar de éste (**123**). Así pues, empezaremos la simplificación dividiendo los dos términos del quebrado por 2, todas las veces que se pueda, luego por 3, por 5, etc., hasta que no pueda reducirse más, porque no se encuentren números que dividan exactamente al numerador y denominador.

Pero, como no todos los números son divisibles exactamente por 2, 3, 5, etc., y á fin de no perder tiempo en divisiones inútiles, vamos á explicar ligeramente la divisibilidad de los números, con cuyo conocimiento se facilita mucho la simplificación de los quebrados.

Divisibilidad de los números

128. *Un número es divisible por otro si contiene á éste un número exacto de veces.*

Llámase divisor ó factor de un número, á todo número que le divide exactamente.

Por ejemplo, 5 es divisor ó factor de 20, porque 20: 5 da de cociente exacto 4. A los factores ó divisores de un número también se les llama submúltiplos de dicho número; de modo que 4 y 5 son factores ó submúltiplos de 20; y 20 es á su vez múltiplo de de 4 y 5.

129. Un número puede tener á la vez varios divisores ó factores, como por ejemplo, el número 180 es divisible por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, etc.

130. *Se llama número primo, el entero que solo es divisible por si mismo y por la unidad.*

Así los números 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,

23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 57, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97...... son primos.

Se dice que dos números son ***primos entre si*** cuando no tienen más factor común que la unidad.

Los números 9 y 16 son primos entre si.

CONSECUENCIAS. De las definiciones que hemos dado de los números primos se deduce:

1°. *Que si un número primo no divide á otro número cualquiera, los dos son primos entre si*

En efecto, como que el número primo solo es divisible por sí mismo, si no divide al otro, no tendrán más factor común que la unidad, luego serán primos entre sí.

2°. *Dos números primos son primos entre si.*

131. Llámase cifra ***par*** á cada uno de los guarismos 2, 4, 6 y 8, que son divisibles exactamente por 2, y se llama cifra ***impar*** á cada uno de los guarismos 1, 3, 5, 7 y 9 que no son divisibles por 2.

132. TEOREMA. *Todo número divisor de otros dos ó más, divide exactamente á la suma de éstos.*

El número 5 es divisor de los números 35, 20 y 45, y digo que también es divisor de la suma 35+20+45.

En efecto:

$$35 = 7 \text{ veces } 5$$
$$20 = 4 \text{ veces } 5$$
$$45 = 9 \text{ veces } 5$$

Ahora sumando ordenadamente esta igualdad tendremos, $35+20+45=(7+4+9)$ veces 5, luego vemos que la suma contiene un número justo de

veces al 5, así pues, es divisible por dicho número.

CONSECUENCIA. *Si un número divide exactamente á otro, divide también á un múltiplo cualquiera de éste.*

El número 7 divide exactamente al número 28, y tendrá que dividir á cualquier múltiplo de 28; por ejemplo, á 28×6: porque sabemos que multiplicar 28 por 6 es tomar el número 28 seis veces por sumando, y como el número 7 divide á todos estos sumandos tendrá que dividir á la suma, según acabamos de demostrar.

133. TEOREMA. *Un número es divisible por 2, cuando termina en 0 ó cifra par, y lo es por 5 cuando termina en 0 ó 5.*

El número 370 digo que es divisible por 2 y por 5 porque termina en 0.

En efecto: 370=37×10, el 2 y el 5 dividen exactamente al número 10, pues, son sus factores luego dividirán á 37 veces 10 ó sea al número 370.

Ahora, de los números 136 y 325, digo: el primero es divisible por 2 porque termina en cifra par, y el segundo lo es por 5 porque termina en 5: en efecto:

136=130+6; y 325=320+5, es decir: que 136 se compone de los sumandos 130 y 6, ambos divisibles por 2, el primero porque termina en 0 y el segundo por ser cifra par; luego, la suma 136 también será divisible por 2 (**132**).

Del mismo modo demostraríamos que 325 es divisible por 5, porque se compone de los sumandos 320 y 5, que lo son, y, por consiguiente, la suma también debe serlo.

134. TEOREMA. *Un número es divisible por*

9 ó por 3, cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible por 9 ó por 3.

Tenemos que:
10=9+1 ; 100=99+1 ; 1000=999+1 ; 10000=9999+1 ; etc., luego vemos que la unidad seguida de ceros es igual á un múltiplo de 9+1.

Tambien observaremos que 5000, por ejemplo, es igual á 1000×5 y como 1000 es igual á un múltiplo de 9 más 1, 5000 se compondrá de 5 veces múltiplo de 9, más 5 veces 1, es decir, que será igual á un múltiplo de 9 más 5; y como lo mismo podríamos demostrar de otro nùmero digito cualquiera seguido de uno ó más ceros, podemos asegurar que *toda cifra significativa, seguida de cualquier número de ceros, es igual á un múltiplo de 9, más el valor absoluto de dicha cifra.*

Demostrado esto, se puede considerar todo número como compuesto de diferentes múltiplos de 9, màs la suma de los valores absolutos de sus cifras; luego, si esta última parte es divisible por 9 ó por 3, como los múltiplos de 9 lo son (**132.** cor.), lo será tambièn el número propuesto (**132**).

Por ejemplo, el número 5241 es divisible por 3, porque:

5000	=	múltiplo	de	9+5
200	=	»	»	9+2
40	=	»	»	9+4
1	=	»	»	1
5241	=	múltiplo	de	9+12

luego el número propuesto vemos que se compone de dos sumandos, uno múltiplo de 9 que es divisible por 3, y el otro 12 que tambièn es divisible

por 3, así pues, la suma ó sea el número dado también lo será (**132**).

Del mismo modo veremos que el número 6057 es divisible por 9, porque

$$\begin{array}{rcl} 6000 & = & \text{múltiplo de } 9+6 \\ 50 & = & \text{» » } 9+5 \\ 7 & = & \text{» » } 7 \\ \hline 6057 & = & \text{múltiplo de } 9+18 \end{array}$$

es decir, que los dos sumandos de que está compuesto el número 6057 son divisibles por 9, luego, la suma ó sea el número propuesto también lo será (**132**).

135. Teorema. ***Un número es divisible por 4 ó por 25, cuando sus dos últimas cifras de la derecha son ceros ó componen un múltiplo de 4 ó de 25.***

Así pues, el número 2300 digo que es divisible por 4 y por 25 porque termina en dos ceros; en efecto, tenemos que

$$2300 = 23 \times 100$$

100 es igual á 4×25, es decir, que es divisible por 4 y por 25, luego, 23 veces 100 ó 2300, también lo será (**132** cor.).

Así los números 4516 y 3275 son divisibles por 4 el primero y por 25 el segundo, porque el primero 4516, es igual á 4500+16, el primer sumando 4500 es divisible por 4, y el segundo 16 también lo es, luego la suma lo será también (**132**).

Del mismo modo demostraremos que 3275 cuyas dos últimas cifras de la derecha componen un múltiplo de 25, todo el número lo es también porque 3275=3200+75 y como los sumandos 3200

y 75 son divisibles por 25, la suma 3275 lo será igualmente (**132**).

136. TEOREMA. *Un número compuesto de más de tres cifras, es divisible por 8 ó por 125, siempre que termine en tres ceros ó que las tres últimas cifras de la derecha formen un número divisible por 8 ó por 125.*

En efecto, los millares son siempre divisibles por 8 y por 125 porque $125 \times 8 = 1000$, y como cualquier número que tenga más de tres cifras puede descomponerse en millares, centenas, decenas y unidades, si el conjunto de sus centenas, decenas y unidades es divisible por 8 ó por 125, todo el número también lo será.

Por ejemplo: el número 31000 es divisible por 8 y por 125 porque

$$31000 = 1000 \times 31$$

el número 1000 sabemos que es divisible por 8 y por 125, luego, también lo será 31000 que es un múltiplo de 1000 (**132** cons.).

Veamos ahora el número 4120 cuyas tres últimas cifras de la derecha forman el número 120 que es divisible por 8, y digo que todo el número 4120 también será divisible por 8, porque

$$4120 = 4000 + 120$$

4000 por terminar en tres ceros es divisible por 8 según lo acabamos de demostrar, y 120 también lo es por hipótesis, luego la suma 4120 será igualmente divisible por 8 (**132**).

Del mismo modo se demuestra que el número

61375 es divisible por 125, porque lo es el formado por sus tres últimas cifras de la derecha.

En efecto, tenemos que

$$61375 = 61000 + 375$$

el número 61000 por terminar en tres ceros es divisible por 125, el otro sumando 375 también lo es por hipótesis, luego, la suma ó todo el número 61375 también lo será (**132**).

137. TEOREMA. *Un número es divisible por 11, cuando la diferencia entre la suma de sus cifras de orden impar y la suma de las de orden par es cero ó un múltiplo de 11.*

Para demostrar este teorema tenemos que probar:

1°. *Que todo número formado por una cifra significativa seguida de un número par de ceros, es igual á un múltiplo de 11, más el valor absoluto de dicha cifra.*

2°. *Que todo número formado por una cifra significativa seguida de un número impar de ceros, es igual á un múltiplo de 11, menos el valor absoluto de dicha cifra.*

1°. Por ejemplo, el número 50000: vamos á probar que es igual á un múltiplo de 11, más 5.

Tenemos que

$$50000 = 10000 \times 5,$$

pero 10000 es igual á 9999+1, luego, sustituyendo este valor en la anterior igualdad resultará

$$50000 = (9999+1) \times 5,$$

practicando ahora la multiplicación indicada, para lo cual, teniendo presente lo que se ha dicho en el número **42**, bastará multiplicar cada sumando por 5 y sumar estos productos parciales. Así:

$$50000 = 9999 \times 5 + 5:$$

obsérvase ahora que el número 9999 tiene tantos nueves como ceros tiene el número dado, y es evidente que esto siempre sucederá, cualquiera que sea el número de ceros que acompañen á la cifra propuesta; luego, cuando el número de ceros sea par, también será par el número de nueves, y cuando el número de ceros sea impar, lo mismo lo será el número de nueves.

En el caso presente el número de ceros es par y por consiguiente también lo es el número de nueves, pero 99 es divisible exactamente por 11, luego pues, un número compuesto de un número par de nueves, también lo será.

Así pues, 9999 es divisible por 11, lo mismo que 9999×5 (**132** cons.), luego el número 50000 se compone de un múltiplo de 11 más el valor absoluto de su cifra significativa.

2º. Sea el número 400000 y vamos á demostrar que es igual á un múltiplo de 11, menos 4.

El número 400000 es igual á 40000×10; pero, según acabamos de probar 40000 es un múltiplo de 11+4; luego

$$400000 = (\text{múltiplo de } 11 + 4) \times 10,$$

efectuando la multiplicación y escribiendo *m.* en lugar de múltiplo, tendremos

$100000 = m.$ de $11\times10+4\times10$; pero $4\times10=10\times4$ $=(11-1)4=11\times4-4$; y sustituyendo este valor en la anterior igualdad veremos que

$$400000 = m. \text{ de } 11\times10+11\times4-4$$

y observando que múltiplo de 11 multiplicado por 10 más 11 por 4 componen un múltiplo de 11, tendremos por fín que $400000 = m.$ de $11-4$.

Demostrados estos dos puntos, vamos á ocuparnos de la demostración del teorema propuesto.

Así, el número $73524=70000+3000+500+20+4$ y según lo que acabamos de demostrar tendremos que

$$\begin{aligned} 70000 &= m. \text{ de } 11+7, \\ 3000 &= m. \text{ de } 11-3, \\ 500 &= m. \text{ de } 11+5, \\ 20 &= m. \text{ de } 11-2, \\ 4 &= 4, \end{aligned}$$

ahora sumando ordenadamente los dos miembros de estas igualdades y observando que *m. de* 11+ *m. de* 11+*m. de* 11+*m. de* 11, componen un múltiplo de 11, resulta que $73524 = m.$ de $11+4+5+7-2-3$; pero, restar primeramente 2 unidades de este resultado y después 3, equivale á restar 5, es decir, $2+3$: luego

$$73524 = m. \text{ de } 11+4+5+7-(2+3).$$

Cuyo resultado nos demuestra que, ***todo número se compone de un múltiplo de 11 más la suma de los valores absolutos de las cifras de orden impar, menos la suma de los valores absolutos de las***

cifras de orden par; luego si esta diferencia es cero, 11 ó múltiplo de 11, el número dado será divisible por 11 porque se puede considerar como compuesto de dos partes divisibles por 11.

Ejemplo. 1°. El número 354321. La suma de los valores absolutos de las cifras de orden impar es $1+3+5=9$, y la de las cifras de orden par es $2+4+3=9$; la diferencia de estas sumas es 0 luego, el número propuesto es un múltiplo exacto de 11.

2°. El número 846252. La suma de los valores absolutos de las cifras de orden impar es 8 y la de las cifras de orden par es 19; la diferencia de estas dos sumas es 11, luego el número dado es divisible por 11 porque se compone de un multiplo de 11 menos 11.

3°. El número 9353817. La suma de los valores absolutos de las cifras de orden impar es $7+8+5+9=29$, y la de las cifras de orden par es $1+3+3=7$ la diferencia de estas dos sumas es 22, luego el número es divisible por 11, porque se compone de un múltiplo de 11 más 22 que también es divisible qor 11 (**132**).

138. Se dice que un quebrado es *irreducible*, cuando está reducido á su menor expresión, es decir, cuando no pueden ser más pequeños sus términos.

139. Teorema. *Un quebrado irreducible tiene sus dos términos primos entre si.*

Porque si no fuese asi, tendrian algun divisor común diferente de la unidad, el cual podría eliminarse dividiendo los dos términos por aquel divisor con lo que el quebrado no sería irreducible, lo que es contra la hipótesis.

140. Regla. *Para simplificar un quebrado,*

se dividen sucesivamente sus dos tèrminos por todos los factores comunes que ellos tengan

Simplificanse los siguientes quebrados:

$$\frac{3960}{27720}, \quad \frac{2970}{10395}, \quad \frac{9438}{47190}:$$

$$\text{El } 1^o.; \quad \frac{3960}{27720} = \frac{396}{2772} = \frac{198}{1386} = \frac{99}{693} = \frac{11}{77} = \frac{1}{7}:$$

Los dos tèrminos del primer quebrado son divisibles por 10, por terminar en 0, así pues sacándole este factor se trasforma en $\frac{396}{2772}$ cuyos dos tèrminos son divisibles por 2 por terminar cada uno de ellos en cifra par, sacando este factor tendremos $\frac{198}{1386}$, cuyos dos tèrminos son también divisibles por 2; sacándole este factor quedará el quebrado reducido á $\frac{99}{693}$, el cual es á su vez divisible por 9 y por 11, quedando por último reducido á $\frac{1}{7}$.

2°. El segundo quebrado se simplifica asi:

$$\frac{2970}{10395} = \frac{990}{3465} = \frac{198}{693} = \frac{22}{77} = \frac{2}{7}$$

Hemos dividido los dos términos del quebrado propuesto, sucesivamente por 3, 5, 9 y 11 resultando por último el quebrado $\frac{2}{7}$ que es irreducible.

3°. Divídase sucesivamecte por 2, 3, 11, 11 y 13 y quedará reducido á su última expresión. Así:

$$\frac{9438}{47190} = \frac{4719}{23595} = \frac{1573}{7865} = \frac{143}{715} = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}$$

LECCIÒN XII

Cálculo de las fracciones ordinarias

ADICIÓN

141. En la adición de los quebrados pueden distinguirse tres casos.

1°. *Sumar quebrados con quebrados.*

2°. *Sumar un entero con un quebrado, ó un quebrado con un entero.*

3°. *Sumar números mixtos.*

142. 1er. Caso—Al tratar de la adición de los números enteros dijimos (**45**), que no se podían adicionar sinó las unidades de una misma especie; así pues, *para sumar quebrados se empezará por reducirlos todos á un común denominardor* (**125**), *luego se sumarán los numeradores, y á esa suma*

se le pondrá por denominador el denominador común.

Por ejemplo, súmese $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$;

Reduciendo estos quebrados á un común denominador tendremos que se trasformarán en

$$\frac{20}{40}\ \frac{30}{40}\ \frac{16}{40};$$

cuyos quebrados representan cada uno cierto número de $\frac{1}{40}$ luego la suma será evidentemente igual á

$$\frac{20+30+16}{40} = \frac{66}{40}.$$

El quebrado $\frac{66}{40}$ que ha resultado es impropio y siempre que en alguna operación se obtengan quebrados de esta clase, convendrá sacarle los enteros que contenga (**115**); y por último se simplifica, cuando se pueda, el quebrado que resulte.

Así, en el ejemplo anterior el quebrado $\frac{66}{40}$ que representa la suma de los quebrados propuestos, se le pueden sacar los enteros y simplificar el quebrado restante.

$$\frac{66}{40} = 1\,\frac{26}{40} = 1\,\frac{13}{20}$$

Otros ejemplos para sumar quebrados

1°. Veamos los quebrados $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{21}$ $\frac{11}{35}$

Empezaremos por reducir los quebrados propuestos á un común denominador para lo cual observaremos que el número 105 es divisible exactamente por los denominadores 7, 21 y 35; pues contiene al primero 15 veces, al segundo 5 y al tercero 3 veces, luego, el número 105 nos convendrá elejirlo para común denominador (**125** obs.), asi pues, multiplicaremos los dos términos del quebrado $\frac{3}{7}$ por 15: los dos términos del $\frac{5}{21}$ por 5, y los dos términos del quebrado $\frac{11}{35}$ por 3, con lo que se trasformarán en los siguientes

$$\frac{45}{105}+\frac{25}{105}+\frac{33}{105};$$

que son equivalentes á los propuestos (**123**), y tienen un común denominado, luego la suma será

$$\frac{45+25+33}{105}=\frac{103}{105}$$

2°. Sean los quebrados $\frac{2}{3}+\frac{5}{9}+\frac{4}{5}+\frac{7}{11}+\frac{9}{16}$; los

cuales reducidos á un común denominador se trasformarán en

$$\frac{15840}{23760}+\frac{9200}{23760}+\frac{19008}{23760}+\frac{15120}{23760}+\frac{13365}{23760}=$$

$$\frac{72533}{23760}=3\frac{1253}{23760}$$

3º. Los quebrados $\frac{4}{5}$ $\frac{10}{15}$ $\frac{8}{25}$ $\frac{15}{16}$; reducidos á un común denominador se trasformarán en

$$\frac{24000}{30000}+\frac{20000}{30000}+\frac{9600}{30000}+\frac{28125}{30000}=\frac{81725}{30000}=2\frac{21725}{30000}=$$

$$2\frac{4345}{6000}=2\frac{869}{1200}$$

4º. Súmense los quebrados $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{5}{8}=$

$$\frac{200}{400}+\frac{160}{400}+\frac{320}{400}+\frac{250}{400}=\frac{930}{400}=2\frac{130}{400}=2\frac{65}{200}=2\frac{13}{40}$$

143. 2º. Caso—Para sumar un número entero y un quebrado ó un quebrado con un entero, ó sea para reducir un número mixto á quebrado,

hemos visto (**116**) que se multiplica el entero por el denominador, al producto se le agrega el numerador, y á esta suma se le pone por denominador el denominador del quebrado.

Súmese $5+\frac{3}{7}$;

Los 5 enteros son equivalentes á $\frac{5\times7}{7}=\frac{35}{7}$, luego la suma será

$$5+\frac{3}{7}=\frac{5\times7}{7}+\frac{3}{7}=\frac{38}{7}$$

Del mismo modo se practican las siguientes sumas:

$$9+\frac{2}{3}=\frac{9\times3+2}{3}=\frac{29}{3};\quad 12+\frac{5}{6}=\frac{12\times6+5}{6}=\frac{77}{6}$$

$$6+\frac{7}{11}=\frac{6\times11+7}{11}=\frac{73}{11};\quad 8+\frac{5}{9}=\frac{77}{9}$$

144. 3er. CASO—Para sumar números mixtos, se suman los quebrados y luego los enteros, agregando á estos los que resulten de la suma de aquellos, ó también pueden reducirse los mixtos á quebrados y proceder como en el primer caso.

Así los números $5\frac{3}{4} + 8\frac{6}{7} + \frac{5}{8}$.

Sumando primeramente los quebrados tendremos que

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{7} + \frac{5}{8} = \frac{168}{224} + \frac{192}{224} + \frac{140}{224} = \frac{500}{224} = \frac{250}{112} =$$

$$\frac{125}{56} = 2\frac{13}{56}$$

La suma de los enteros es $5+8+9=22$, cuya suma agregada á la anterior $2\frac{13}{56}$ de los quebrados dará $24\frac{13}{56}$, que es evidentemente la suma de los números mixtos propuestos.

Reduciendo los mixtos á quebrados obtendremos el mismo resultado, así:

$$5\frac{3}{4} + 8\frac{6}{7} + 9\frac{5}{8} = \frac{23}{4} + \frac{62}{7} + \frac{77}{8}$$

y reduciéndolos á un común denominador tendremos

$$\frac{1288}{224}+\frac{1984}{224}+\frac{2156}{224}=\frac{5428}{224}=24\,\frac{52}{224}=\frac{26}{112}=$$

$$24\,\frac{13}{56}$$

De modo que como antes hemos visto la suma de los números mixtos propuestos es igual á $23\frac{13}{56}$

Es más sencillo el primer método que el segundo, así es que en la práctica se emplea siempre el primero, disponiendo la operación como en los ejemplos siguientes:

$4\,\frac{1}{2}$	$\frac{280}{560}$	$8\,\frac{3}{5}$	$\frac{990}{1650}$
$3\,\frac{5}{7}$	$\frac{400}{560}$	$6\,\frac{2}{3}$	$\frac{1100}{1650}$
$8\,\frac{3}{4}$	$\frac{420}{560}$	$4\,\frac{1}{10}$	$\frac{165}{1650}$
$9\,\frac{7}{10}$	$\frac{392}{560}$	$12\,\frac{9}{11}$	$\frac{1350}{1650}$
$26\,\frac{93}{140}$	$\frac{1492}{560}$	$23\,\frac{61}{330}$	$\frac{3605}{1650}$

Puede también disponerse la operación así:

$$
\begin{array}{lr}
12\frac{4}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots & 48 \\
19\frac{2}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots & 40 \\
10\frac{3}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots & 45 \\
27\frac{6}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots & 24 \\
\hline
70\frac{37}{60} \ldots\ldots\ldots\ldots & 157 \\
 & 37
\end{array}
\quad
\begin{array}{|l}
60 \\
\hline
2\frac{37}{60}
\end{array}
$$

PROBLEMAS

145. 1°. Un niño ha empleado $1\frac{2}{3}$ horas en estudiar la lección de historia, $\frac{3}{4}$ de hora para la lección de aritmética, $1\frac{25}{60}$ horas para la lección de gramática, ¿cuánto tiempo ha empleado para estudiar las tres lecciones?

2°. En un estanque concurren cuatro cana-

les conduciendo agua: el primero necesita 17 horas para llenarlo, el 2°. emplea 36, el tercero necesita 48 y el 4.° solo emplea 12; ¿en una hora qué parte del estanque llenan los cuatro canales?

3.° Cuatro albañiles trabajan en una obra; uno hace $2\frac{1}{2}$ metros de pared por día, otro $1\frac{8}{9}$, el tercero hace $2\frac{3}{4}$ y el último solo hace $1\frac{1}{3}$; ¿cuántos metros de pared hacen por día entre los cuatro?

4.° Cinco personas se comprometen á hacer una escavación, la primera dice que necesita 8 días para concluirla, la segunda asegura no necesitar mas de 7, la tercera necesita 5, la cuarta se compromete á hacerla en 6 días, y por último la 5 dice que no puede hacerla en menos de 9 días.

¿Que parte de la obra harian en un día, si trabajasen reunidas las cinco personas citadas?

LECCIÒN XIII

Sustracción de los quebrados ordinarios

146. En la sustracción de los quebrados pueden ocurrir tres casos: 1°. *restar un quebrado*

de otro: 2.° restar un quebrado de un entero: 3°. restar números mixtos.

147. 1.er Caso Como no pueden restarse unidades de diferente especie resulta que

Para restar quebrados se reducen primeramente á un común denominador. Se resta el numerador menor del mayor, y á la diferencia se le pone por denominador, el denominador común.

Por ejemplo, réstase $\frac{1}{5}$ de $\frac{6}{11}$, y $\frac{2}{3}$ de $\frac{11}{12}$: tendremos que:

$$\frac{6}{11}-\frac{1}{5}=\frac{30}{55}-\frac{11}{55}=\frac{29}{55}:$$

$$\frac{11}{12}-\frac{2}{3}=\frac{33}{36}-\frac{24}{36}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

148. 2.° Caso *Para restar un quebrado propio de un entero, se toma del entero una unidad, la que se pone en forma de quebrado cuyo denominador sea igual al denominador del quebrado sustraendo* **(118)** *se resta este del quebrado así formado, y la diferencia se une al entero rebajándole una unidad.*

Por ejemplo restemos $\frac{5}{8}$ de 12; tenemos que:

$$12-\frac{5}{8}=11\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=11\frac{3}{8}.$$

Réstase $\frac{3}{7}$ de 15.

$$15 - \frac{3}{7} = 14\frac{7}{7} - \frac{3}{7} = 14\frac{4}{7}$$

149. 3.er Caso—*Para restar números mixtos, se resta el quebrado sustraendo del quebrado minuendo, y el entero sustraendo del entero minuendo; la reunión de estos dos restos forma la diferencia total.*

Si el quebrado sustraendo fuese mayor que el quebrado minuendo, se agrega á éste una unidad y otra al entero sustraendo, para que la diferencia no se altere **(54).**

Restar $3\frac{1}{5}$ de $8\frac{7}{9}$; la operación se dispone así:

$$\begin{array}{lcr} 8\frac{7}{9} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{35}{45} \\ 3\frac{1}{5} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{9}{45} \\ \hline 5\frac{26}{35} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{26}{35} \end{array}$$

Restar $6\frac{4}{5}$ de $15\frac{2}{7}$; y $8\frac{7}{11}$ de $23\frac{2}{5}$.

$15\frac{2}{7} \ldots\ldots \frac{10}{35} \ldots \frac{45}{35}$	$23\frac{2}{5} \ldots\ldots \frac{22}{55} \ldots \frac{77}{55}$
$6\frac{4}{5} \ldots\ldots \frac{28}{35} \ldots \frac{28}{35}$	$8\frac{7}{11} \ldots\ldots \frac{35}{55} \ldots \frac{35}{55}$
$8\frac{17}{35} \ldots\ldots\ldots \frac{17}{35}$	$14\frac{42}{55} \ldots\ldots\ldots \frac{42}{55}$

PROBLEMAS

150. 1°. Un estudiante emplea todos los días 2 horas y $\frac{3}{4}$ para estudiar sus lecciones; tiene 5 horas de clase, gasta $1\frac{35}{60}$ para almorzar $1\frac{45}{60}$ para comer y, por último, destina 3 horas para recreos. ¿Cuánto tiempo le queda para dormir?

2°. Juan tiene 12 años y $\frac{3}{4}$; Pedro solo tiene $9\frac{4}{5}$; ¿cuántos años más tiene Juan que Pedro?

3°. Entre 3 obreros hicieron respectivamente $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{13}$ y $\frac{4}{7}$ de una obra; ¿qué porción de la obra falta para hacer?

4°. Un depósito de agua se llena por medio de unos conductos en 5 horas y por otros se vacía en 8; estando abiertos los dos conductos, ¿qué porción del depósito se llenaría en una hora?

5°. Dos trenes han salido al mismo tiempo de una estación y caminan en igual dirección; pero uno corre con una velocidad de 1560 kilómetros por dia, mientras que el otro solo recorre 1000. Al cabo de una hora de viaje ¿á qué distancia se hallarán uno de otro?

7°. Un comerciante compró 17 carradas de maíz, conteniendo cada una 9 hectólitros, por 180 pesos; y otras 23 carradas, conteniendo cada una 12 hectólitros, por 250 pesos. ¿Cuál es la diferencia de precio del hectólitro de maíz?

LECCIÒN XIV

Multiplicación de los quebrados ordinarios.

151. En la multiplicación de quebrados se distinguen tres casos:

1°. *Multiplicar un quebrado por un entero ó un entero por un quebrado*; 2°. *multiplicar un quebrado por otro*; 3°. *multiplicar números mixtos.*

152. 1er. Caso.—Multiplicar $\frac{6}{11}$ por 5.

$$\frac{6}{11} \times 5 = \frac{6}{11} + \frac{6}{11} + \frac{6}{11} + \frac{6}{11} + \frac{6}{11} = \frac{6 \times 5}{11} = \frac{30}{11}$$

De la misma manera veremos que

$$5 \times \frac{6}{11} = \frac{5 \times 6}{11} = \frac{30}{11}.$$

Porque el multiplicador $\frac{6}{11}$, representa 6 veces la onzava parte de la unidad; luego, el producto se hallará tomando 6 veces la onzava parte del multiplicando 5 (**60**).

Pero la onzava parte de 5 es $\frac{5}{11}$; luego, 6 veces este número formará el producto pedido $\frac{5 \times 6}{11}$.

De donde se deduce que *para multiplicar un quebrado por un entero ó viceversa, se multiplica el numerador por el entero, dejando el mismo denominador.*

153. 2º. Caso.—Multiplíquese $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$.

Según la definición que hemos dado de la multiplicación (**60**), el producto que buscamos debe ser respecto al quebrado $\frac{5}{7}$, lo que el quebrado $\frac{3}{4}$ es respecto á la unidad.

El multiplicador $\frac{3}{4}$ representa las tres cuartas partes de la unidad. Luego, el producto será igual

á los $\frac{3}{4}$ del multiplicando $\frac{5}{7}$.

Ahora bien, $\frac{1}{4}$ de $\frac{5}{7}$ es evidentemente 4 veces menor que $\frac{5}{7}$; así, pues, su valor lo hallaremos multiplicando el denominador por 4 (**122**). Luego, $\frac{1}{4}$ de $\frac{5}{7}$ será igual á $\frac{5}{7.4}$ y los $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ que buscamos, se obtendrán multiplicando por 3 el valor que hemos hallado para $\frac{1}{4}$. Así, será $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ igual á $\frac{5}{7.4}\times 3=\frac{5.3}{7.4}$, y como los $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ es el producto de $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$, tendremos, por último, que

$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{5.3}{7.4}=\frac{15}{28}.$$

De donde se infiere que

Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican los numeradores, y después los denominadores, formando el primer producto el numerador y el segundo el denominador del quebrado que se busca.

Así:

$$\frac{6}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{6.4}{7.9}=\frac{24}{63}=\frac{8}{21}.$$

$$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{4.3}{9.8}=\frac{12}{72}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

154. *El producto de dos quebrados no se altera, aunque se invierta el orden de ellos:* pues el producto tendrá siempre por numerador el producto de los numeradores de los factores, y por denominador el producto de sus denominadores; y estos productos serán siempre iguales, cualquiera que sea el orden de sus factores (**66**).

De modo que

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{4.3}{5.7}=\frac{3.4}{7.5}=\frac{3}{7}\times\frac{4}{5}:$$

de donde resulta que

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\times\frac{4}{5}.$$

155. *Para multiplicar varios quebrados, se multiplican los numeradores y los denominadores respectivamente entre sí, y se divide el primer producto por el segundo.*

Por ejemplo, multiplicar $\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{6}{11}$, digo

que es igual á $\frac{3.5.4.6}{4.8.7.11}$.

En efecto, el producto de $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$, es igual á $\frac{3.5}{4.8}$; luego, el producto de los tres primeros quebrados será igual á $\frac{3.5}{4.8} \times \frac{4}{7} = \frac{3.5.4}{4.8.7}$: y el producto. de los cuatro quebrados será $\frac{3.5.4}{4.8.7} \times \frac{6}{11} = \frac{3.5.4.6}{4.8.7.11}$.
Luego, tendremos que:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{6}{11} = \frac{3.5.4.6}{4.8.7.11} = \frac{260}{2464} = \frac{180}{1232} = \frac{90}{616} = \frac{45}{308}.$$

156. QUEBRADO DE QUEBRADO. *Se llama quebrado de quebrado, el número que se compone de parte ó partes iguales de otro quebrado.*

Por ejemplo: la tercera parte de cuatro quintos, tres cuartos de siete octavos, cinco novenos de once treceavos etc., son *quebrados de quebrados.*

El valor de un quebrado de quebrado se halla facilmente multiplicando entre sí los quebrados que le forman

Así: $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{7}$, digo que es lo mismo que

$$\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{3.5}{8.7}=\frac{15}{56}.$$

En efecto, $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{7}$, que es lo mismo que tomar 3 veces $\frac{1}{8}$ de $\frac{5}{7}$: tomar $\frac{1}{8}$ de $\frac{5}{7}$ equivale á hacer $\frac{5}{7}$ 8 veces menor, y será igual á $\frac{5}{7.8}$ (**122**) y los $\frac{3}{8}$ se obtendrán haciendo el número $\frac{5}{7.8}$, 3 veces mayor: es decir que $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{7}$ es igual á $\frac{5.3}{7.8}$, ó sea á $\frac{3.5}{8.7}$, que es lo queríamos demostrar.

157. Observación. En la multiplicación de $\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}$ (**153**), hemos visto que su producto $\frac{5\times3}{7\times4}$ representa los $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$; luego, es menor que el factor $\frac{5}{7}$, y como el orden de los factores no altera el producto, también vemos que éste representa los $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$; luego, también es menor que

$\frac{3}{4}$; con idéntico racionio probaríamos lo mismo respecto á otros dos quebrados propios cualesquiera, es decir que, *el producto de dos quebrados propios, es menor que cada uno de los factores que lo forman.*

158. 3er. Caso.—*Para multiplicar números mixtos se reducen primeramente los mixtos á quebrados impropios* (**116**) *y luego se procede como se ha explicado para los casos anteriores.*

EJEMPLOS

1°. $5\frac{2}{7}\times 4\frac{3}{8}=\frac{37}{7}\times\frac{35}{8}=\frac{1295}{56}=23\frac{7}{56}$:

2°. $2\frac{1}{3}\times 3\frac{2}{5}=\frac{7}{3}\times\frac{17}{5}=\frac{119}{15}=7\frac{14}{15}$:

3°. $\frac{3}{4}6\times\frac{5}{7}=\frac{3}{4}\times\frac{47}{7}=\frac{141}{28}=5\frac{1}{28}$:

4°. $9\times 2\frac{6}{11}=9\times\frac{28}{11}=\frac{252}{11}=22\frac{10}{11}$.

PROBLEMAS

1°. $\frac{3}{7}$ de una manzana de terreno, costaron

524 pesos; ¿cuànto costaría una manzana entera?

2°. $\frac{5}{9}$ de kilogramo de un metal fino, á razón de 150 pesos el kilogramo, ¿cuánto importan?

3°. Un jornalero que gana 25 reales diarios, trabajó 8 días y $\frac{2}{5}$, ¿cuánto ganó?

4°. Se contrató con un albañil una obra en 635 pesos $\frac{7}{10}$; pero solo pudo hacer $\frac{6}{11}$ de dicha obra, ¿cuánto le corresponde cobrar?

5°. ¿Cuánto serán los $\frac{5}{7}$ de $\frac{8}{13}$ de peso?

6°. Se compraron 36 $\frac{4}{7}$ metros de tela; á razón de 2 pesos y $\frac{3}{5}$ el metro, ¿cuánto importó la tela?

7°. ¿Cuántos días representan los $\frac{8}{9}$ de $\frac{6}{7}$ de $\frac{3}{4}$ de año, en el supuesto de que el año tiene 365 días?

LECCIÓN XV

División de los quebrados ordinarios

159. La división de los quebrados comprende cuatro casos.

1°. *Dividir un quebrado por un entero; 2°. dividir un entero por un quebrado; 3°. dividir un quebrado por otro; 4°. dividir números mixtos.*

160. 1er. Caso. *Para dividir un quebrado por un entero, ya se ha visto* (**122**) *que basta multiplicar el denominador por el entero, dejando el mismo numerador; ó bien se divide el numerador por el entero, permaneciendo el mismo denominador* (**121**).

Así: $$\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{5.2} = \frac{3}{10};$$

$$\frac{8}{11} : 4 = \frac{8}{11.4} = \frac{8}{44} = \frac{2}{11};$$

ó también;

$$\frac{8}{11} : 4 = \frac{8:4}{11} = \frac{2}{11}$$

$$\frac{15}{23} : 5 = \frac{15:5}{23} = \frac{3}{23}.$$

161. 2°. CASO. —Divídase 6 por $\frac{3}{4}$.

El cociente que resulte de dividir 6 por $\frac{3}{4}$ será un número tal que multiplicado por el divisor $\frac{3}{4}$ deberá producir el dividendo 6 (**83**).

Llamémosle c á este cociente y tendremos que

$$c \times \frac{3}{4} = 6$$

pero multiplicar c por $\frac{3}{4}$ es lo mismo que tomar los $\frac{3}{4}$ de c (**60**), luego:

$$\frac{3}{4} \text{ de } c = 6:$$

así pues, $\frac{1}{4}$ de c, será igual á $\frac{6}{3}$ y los $\frac{4}{4}$ de c, ó sea toda la c, es decir, todo el cociente, será igual á 4 veces el valor de $\frac{1}{4}$ de c, y tendremos por fin que

$$c = \frac{6}{3} \times 4 = \frac{6 \times 4}{3} = 6 \times \frac{4}{3}$$

por consiguiente

$$6 : \frac{3}{4} = 6 \times \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

De donde se deduce que *para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el quebrado divisor invertido.* (·)

EJEMPLOS

1°. $5 : \frac{6}{7} = 5 \times \frac{7}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}.$

2°. $8 : \frac{4}{11} = 8 \times \frac{11}{4} = \frac{88}{4} = 22.$

3°. $12 : \frac{3}{5} = 12 \times \frac{5}{3} = \frac{60}{3} = 20.$

4°. $13 : \frac{7}{9} = 13 \times \frac{9}{7} = \frac{117}{7} = 16\frac{5}{7}$

(·) Invertir un quebrado es cambiar el numerador por el denominador y viceversa.

162. 3er. CASO.—Sea dividir $\frac{7}{8}$ por $\frac{4}{5}$.

Llamando c al cociente que resulte de dividir $\frac{7}{8}$ por $\frac{4}{5}$, tendremos que

$$c \times \frac{4}{5} = \frac{7}{8}$$

los $\frac{4}{5}$ de c valen $\frac{7}{8}$, un solo quinto de c valdrá la cuarta parte de $\frac{7}{8}$ ó sea $\frac{7}{8} : 4 = \frac{7}{8 \times 4}$ y toda la c, ó sean los $\frac{5}{5}$ del cociente, será un número 5 veces mayor que $\frac{7}{8 \times 4}$, es decir, que valdrá $\frac{7}{8 \times 4} 5 = \frac{7 \times 5}{8 \times 4}$; luego

$$c = \frac{7 \times 5}{8 \times 4} = \frac{7}{8} \times \frac{5}{4}$$

por consiguiente

$$\frac{7}{8} : \frac{4}{5} = \frac{7}{8} \times \frac{5}{4} = \frac{35}{32} = 1\frac{3}{32}.$$

De donde deducimos que *para dividir un quebrado por otro, se multiplica el quebrado dividendo, por el quebrado divisor invertido.*

EJEMPLOS

1º. $\frac{5}{9} : \frac{3}{7} = \frac{5}{9} \times \frac{7}{3} = \frac{35}{27} = 1 \frac{8}{27}$

2º. $\frac{6}{11} : \frac{9}{22} = \frac{6}{11} \times \frac{22}{9} = \frac{132}{99} = \frac{44}{33} = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3}$

3º. $\frac{5}{8} : \frac{6}{25} = \frac{5}{8} \times \frac{25}{6} = \frac{125}{48} = 2 \frac{29}{48}$

4º. $\frac{4}{15} : \frac{8}{25} = \frac{4}{15} \times \frac{25}{8} = \frac{100}{120} = \frac{50}{60} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

163. 4º. CASO—*Para dividir un número mixto por otro, se reducen ambos números á quebrados, y luego se procede como se ha explicado para los casos anteriores.*

EJEMPLOS

1º. $8\frac{2}{3} : 3\frac{5}{7} = \frac{26}{3} : \frac{26}{7} = \frac{26}{3} \times \frac{7}{26} = \frac{182}{78} = \frac{91}{39} = 2\frac{13}{39}$

2°. $5\frac{6}{11} : 2\frac{4}{5} = \frac{61}{11} : \frac{14}{5} = \frac{305}{154} = 1\frac{151}{154}$

3°. $6\frac{7}{9} : 4 = \frac{61}{9} : 4 = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$

4°. $11\frac{3}{5} : \frac{4}{9} = \frac{58}{5} : \frac{4}{9} = \frac{522}{20} = 26\frac{2}{20}$

5°. $\frac{6}{13} : 2\frac{7}{8} = \frac{6}{13} : \frac{23}{8} = \frac{138}{104} = 1\frac{34}{104} = 1\frac{17}{52}$

6°. $9 : 4\frac{2}{3} = 9 : \frac{14}{3} = \frac{27}{14} = 1\frac{13}{14}$.

OBSERVACIONES

164. 1°. *El cociente de la unidad por un quebrado cualquiera es igual al mismo quebrado invertido.* Así:

1°. $\frac{4}{9} = 1 \times \frac{9}{4} = \frac{1 \times 9}{4} = \frac{9}{4}$.

2°. *Para dividir dos quebrados que tengan igual denominador, basta dividir el numerador del dividendo por el del divisor.* Así:

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{7} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{5 \times 7}{3 \times 7} = \frac{5}{3}$$

3°. *Para dividir dos quebrados que tengan igual numerador, basta dividir el denominador del divisor por el del dividendo.* Así:

$$\frac{5}{7} : \frac{5}{11} = \frac{5}{7} \times \frac{11}{5} = \frac{5 \times 11}{5 \times 7} = \frac{11}{7}$$

4ª. *Dividiendo un número cualquiera por la unidad, el cociente es igual al dividendo: si se divide por un número mayor que la unidad, resulta un cociente menor que el dividendo: y si se divide por un número menor que la unidad, resulta un cociente mayor que el dividendo.*

PROBLEMAS

165. 1°.—8 albañiles contrataron hacer $236\frac{5}{9}$ metros de pared, ¿cuántos tiene que hacer cada uno?

$$236\frac{5}{9} : 8 = \frac{2129}{9} : 8 = \frac{2129}{72} = 29\frac{41}{72}.$$

Tiene que hacer cada uno $29\frac{41}{72}$ metros.

2º. $25\frac{4}{11}$ hectáreas de terreno costaron $512\frac{3}{5}$ pesos, ¿cuánto costó la hectárea?

$$512\frac{3}{5}:25\frac{4}{11}=\frac{2563}{5}:\frac{279}{11}=\frac{28193}{1395}=20\frac{293}{1395}$$

La hectárea cuesta $20\frac{293}{1395}$ pesos.

3º.—Un padre dejó para su hijo mayor el tercio de su capilal, para el segundo el cuarto, y para el tercero el quinto, quedándole 250 pesos que mandó distribuir entre los pobres, ¿cuánto recibió cada hijo?

A los hijos les ha correspondido $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$ del capital total ó sean $\frac{47}{60}$ que es la suma de dichos quebrados, luego faltan $\frac{13}{60}$ para completar todo el capital, pero estos $\frac{13}{60}$ son los 250 pesos que le sobraron y mandó entregar á los pobres, luego los $\frac{13}{60}$ del capital componen 250, asi pues el capital será igual á

$$250:\frac{13}{60}=\frac{250\times60}{13}=1153\frac{11}{13}$$

COMPROBACION

El capital se compone de $1153\frac{11}{13}$ pesos que se distribuyen así:

Al hijo mayor	$1153\frac{11}{13}:3=384\frac{8}{13}$
Al segundo	$1153\frac{11}{13}:4=288\frac{6}{13}$
Al tercero	$1153\frac{11}{13}:5=230\frac{10}{13}$
A los pobres	250
Suma total	\$ $1153\frac{11}{13}$

EJERCICIOS

1º.—Un comerciante empleó en una especulación de granos los $\frac{2}{5}$ de su capital, en otra de vinos empleó los $\frac{4}{13}$; y $\frac{2}{9}$ más empleó en otros ne-

gocios, quedándole en caja 582 pesos; ¿què capital tiene?

2º.—A un estanque van á desaguar tres canales, el primero puede llenarlo en $25\frac{3}{4}$ días, el segundo en $8\frac{5}{9}$, y solo 3 dias emplea el tercero: ¿cuánto tiempo emplearian para llenarlo corriendo los tres canales á la vez?

3º.—La fortuna de un estanciero aumentó en el año 1890, $\frac{2}{13}$, en el siguiente $\frac{6}{17}$ de su nuevo capital, y por fin este año ganó $\frac{1}{7}$ de esta última cantidad, poseyendo actualmente una fortuna de 543000 pesos, ¿cuánto tenia á principios del año 1890?

4º—Mi reloj adelanta $\frac{5}{93}$ de hora por día, hoy al medio día lo arreglé de modo que marcaba la hora justa; ¿qué hora será luego cuando mi reloj marque las $8\frac{1}{4}$ de la noche?

5º.—De la estación Nico Pérez salió el tren ordinario de pasajeros á las 8h 30m de la mañana caminando á razón de $45\frac{2}{3}$ kilómetros por hora, y á las 11h de la misma mañana salió otro tren ex-

pres con una velocidad de $56\frac{4}{5}$ kilómetros por hora, ¿á qué distancia de la estación Nico Pérez el segundo tren alcanzará al primero?

6º.—Le preguntó un individuo á otro, que capital había reunido en los 15 años que llevaba trabajando en un saladero del Uruguay, y este le contestó que los $\frac{6}{11}$ de los $\frac{8}{9}$ de los $\frac{4}{5}$ de la fortuna que tiene alcanza á 1000 pesos, ¿á cuánto asciende la fortuna que posée?

7º.—Un carpintero hace una obra en 10 dias trabajando 8 horas diarias: otro trabajando 12 horas se compromete á construir la misma obra en 6 dias, ¿en qué tiempo harían la expresada obra los dos carpinteros trabajando 10 horas diarias?

8º.—En ocho horas un caballo recorrió $120\frac{5}{7}$ kilómetros, ¿cuánto caminó por hora?

9º.—Un hortelano recibió $35\frac{2}{7}$ pesos por preparar la tierra de los $\frac{5}{9}$ de una quinta, ¿si hubiera preparado toda la tierra de la quinta, cuánto hubiese recibido?

10º.—Una rueda da $54356\frac{4}{7}$ vueltas por día, ¿cuántas dará en una hora y media?

LECCIÓN XVI

FRACCIONES DECIMALES

Numeración y propiedades generales de los números decimales

166. Llámase *quebrado ó fracción decimal, aquella que tiene por denominador la unidad seguida de uno ó varios ceros.*

Por ejemplo: $\frac{8}{10}$, $\frac{13}{100}$, $\frac{517}{1000}$, $\frac{6839}{10000}$, etc., son fracciones decimales.

Si el denominador de la fracción es 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000, etc.; las porciones que representa la fracción, se llaman respectivamente ***décimas, centèsimas, milèsimas, diezmilèsimas, cienmilèsimas, millonèsimas, diezmillonésimas, etc.***

Una unidad entera sábese que vale 10 décimas, ó 100 centèsimas, ó 1000 milèsimas, ó 10000 diezmilésimas, etc., luego pues, una décima vale 10 centésimas, una centésima 10 milésimas, una milésima 10 diezmilésimas, etc.

167. Hemos visto (**26**) en el sistema de numeración decimal que cada cifra representa unidades diez veces mayores que las que representa la cifra inmediata de la derecha, por consiguiente, si continuamos el mismo sistema hacia la derecha de las unidades simples, la primera cifra

ocupará el lugar de las décimas, la segunda el de las centésimas, la tercera el de las milésimas, la cuarta el de las diezmilésimas, etc., á cuyas unidades fraccionarias se les llama también *unidades* de 1º., 2º., 3º., 4º., etc., orden decimal.

168. Según acabamos de ver, cualquier fracción decimal puede escribirse sin denominador, para lo cual bastará escribir el numerador y colocar una señal cualquiera, una *coma* por ejemplo, á la derecha de la cifra que expresa las unidades simples, que será un cero sino las hay; y así, la primera cifra á la derecha de la coma representará las unidades decimales de primer orden ó sean las décimas, la segunda representará las centésimas, la tercera las milésimas, etc.

Por ejemplo, los quebrados $\frac{7}{10}$, $\frac{239}{1000}$, $\frac{5485}{10000}$ se pueden escribir sin denominador de este modo: 0.7, 0.239, 0.5485.

En efecto, el primer quebrado $\frac{7}{10}$ representa la unidad dividida en 10 partes iguales de las que se toman 7, es decir, menos de la unidad; para expresar dicha fracción de la unidad sin escribir el denominador, pondremos 0 en lugar de los enteros, porque el quebrado no los tiene, después una *coma* para indicar que empiezan las unidades decimales y luego un 7 que, por ocupar el lugar de las unidades de primer orden decimal, representará décimas, así pues, 0,7 (*siete décimas*) vemos que es igual á $\frac{7}{10}$

Del mismo modo veremos que el quebrado $\frac{239}{1000}$ que representa 239 milésimas, puede expresarse por 0,239, es decir, por un NÚMERO DECIMAL compuesto de 0 enteros, 2 decimas, 3 centèsimas y 9 milésimas. En efecto, cada décima vale 10 centésimas, las 2 décimas valdrán 20 centésimas; asi pues, el ***número decimal*** 0,239 se compone de 23 cetésimas y 9 milésimas; y como cada centésima se compone de 10 milésimas, las 23 centésimas compondrán 230 milésimas. Luego el ***número decimal*** 0, 239 se compone de 239 milésimas, exactamente lo mismo que $\frac{239}{1000}$.

Igualmente demostrariamos que el número 0,5485, que se compone de 5 décimas, 4 centésimas, 8 milésimas y 5 diezmilésimas es igual á 5485 diezmilésimas, y por consiguiente es lo mismo que $\frac{5485}{10000}$.

169. Luego, pues, según acabamos de ver, ***para escribir un*** NÚMERO DECIMAL ***se empieza por escribir la parte entera, si la hubiese, y si nó, se pone un cero en su lugar; después, la coma y á su derecha se escriben las décimas, despues las centésimas, luego las milésimas etc., y asi sucesivamente, supliéndose con ceros la falta de unidades de algún orden decimal.***

Ejemplos: Para escribir cuatro décimas, siete centésimas y tres milésimas, se escribirá

0.473

Escríbase ocho centésimos, cinco milésimos,

0.085

En este número decimal no hay dècimas, por consiguiente, se ha suplido con un 0 la falta de las unidades decimales de primer orden; de igual modo veremos que el número decimal, dos enteros, seis décimas, siete diezmilésimas y 9 millonésimas, se escribe así:

2.600709

supliendo con dos ceros los lugares de las centésimos y milèsimas que faltan en el número propuesto.

170. Obsérvase que un número decimal contiene tantas unidades decimales del orden de su última cifra, como unidades simples tiene tódo el número considerado como entero.

Por ejemplo, los números decimales 0.314 y 36,0208, que se componen de 3 décimas, 1 centésima y 4 milésimas, el primero, y de 36 enteros, 2 centésimas y 8 diezmilésimas, el segundo, son respectivamente iguales á 314 milésimas el primero y á 360208 diezmilésimas el segundo (**168**); luego, *para leer un número decimal se lee todo el número como si fuese entero, dándole á la última cifra leida, la denominación que le corresponde por el orden decimal á que pertenece.*

Así los números decimales 357,46; 0,3005; 4,00025; se leen respectivamente así: 35 mil 746 centésimas; 3 mil 5 diezmilèsimas; 400 mil, 25 cienmilésimas.

Cuando el número decimal tiene enteros, generalmente se lee enunciando primero los enteros y

después los decimales; así en los ejemplos anteriores, podíamos haber leído de este modo:

357 enteros y 46 centésimas; 4 enteros y 25 cienmilésimas.

171. ***El valor de un número decimal no se altera, aunque se le añadan ó quiten ceros á su derecha.***

Así pues, el número 3,45 digo que es igual á 3.45000

En efecto, el número propuesto se compone de 345 centésimas, y como cada centésima tiene 10 milésimas, tenemos que dicho número contiene 3450 milésimas; cada milesima vale 10 diezmilésimas, luego las 3450 milésimas son equivalentes á 34500 diezmilèsimas; del mismo modo veríamos que que las 34500 diezmilésimas son equivalentes á 345000 cienmilésimas y estas á 3450000 millonésimas, etc.; y como todos estos números son iguales al propuesto 3,45 queda demostrado que un decimal no se altera agregándole cuantos ceros se quiera á su derecha y tampoco puede alterarse quitándole los que tenga.

CONSECUENCIAS—***Todo número entero puede considerarse como decimal, escribiendo á su derecha el número de ceros decimales que se quiera.***

172. ***Para dividir un número entero por la unidad seguida de ceros, basta separar de la derecha del número dado, tantas cifras decimales como ceros acompañen á la unidad; y si el número no tiene suficientes cifras para hacer esta separación, se le agregan ceros á su izquierda.***

Por ejemplo, el número 346 se quiere dividir por 100:

Tenemos que $346:100=\frac{346}{100}=3.46$ (**168**).

Ahora el número 835 se quiere dividir por 100000.

Tenemos que $835:100000=\frac{835}{100000}=0,00834$.

Del mismo modo veríamos que 27:1000000= 0,000027.

173. *Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares á la derecha como ceros acompañen á la unidad, y al contrario para dividirlo*

En uno y en otro caso si no hubiese bastantes cifras se suplirán con ceros, añadiéndolos en el primer caso á la derecha de los decimales y en el segundo á la izquierda de los enteros.

Así; 3,426×100=342,6; 42,37×1000=42370; 136,045×100000=13604500.

Porque corriendo la coma á la derecha, se hace el número 10 veces mayor por cada lugar que se adelanta la coma.

En efecto, corriendo la coma del número 3,25 un lugar á la derecha, el número resultante 32,5 es diez veces mayor que el primero, porque:

3.25=3 unidades+2 décimas+5centésimas

32.5=3 decenas+2 unidades+5 décimas; donde observaremos que cada una de las partes del segundo número es *diez veces mayor* que la correspondiente del primero. Luego, pues, todo el número segundo es *diez veces mayor* que el primero.

Si ahora corremos la coma un lugar más á la derecha en el último número, lo haremos otras diez veces mayor que el primero. Del mismo mo-

do veríamos que corriendo la coma tres lugares á la derecha, se hace el número *mil veces mayor*; y que corriendo cuatro lugares, se hace *diez mil veces mayor*.

De un modo análogo demostraríamos que corriendo la coma á la izquierda, el número se hace diez veces menor por cada lugar que se corra la coma. Así:

325,467:100=3,25467
83,104:1000=0,083104
25,47:100000=0,0002547
0,025:1000000=0,000000025

LECCIÓN XVII

Adición de los números decimales

174. *Para sumar números decimales, se ejecuta la operación como si fuesen enteros, escribiendo la coma en la suma total á la izquierda de las décimas.*

Por ejemplo, sumemos

3,045+28,36+0,0425+0,024+469,7

La operación se ordena lo mismo que la de los enteros, teniendo cuidado de que las unidades del mismo orden se correspondan en columna vertical, lo cual se consigue colocando los sumandos unos debajo de los otros, de manera que las comas estén todas en columna. Así:

	3,045
	28,36
	0,0425
	0,024
	469,7
Suma	501,1715

PROBLEMAS

1°. Un agricultor ha obtenido en la venta de sus cosechas las cantidades siguientes: trigo 523 pesos 45 centésimos: maiz 237 pesos 18 milèsimos: porotos 180 pesos 10 centésimos: frutas, 9 pesos 5 décimos y en diferentes legumbres 20 pesos 108 diezmilèsimos, ¿Cuánto obtuvo por todo?

	523,45
	237,018
	180,10
	9,5
	20,0108
Suma	970,0788

Obtuvo 970 pesos y 788 diezmilésimos de peso.

2°. Un capitalista tiene dinero colocado en cinco casas bancarias; en la primera tiene $ 25,315, en la segunda $ 83140.68, en la tercera $ 12037,0025, en la cuarta $ 8459,6 y en la quinta $ 136400,8008 ¿cuánto importa el capital que tiene colocado en esas casas?

```
      25,315
   83140,68
   12037,0025
    8459,6
  136400,8008
  ------------
  240063,3983
```

Tiene colocado un capital compuesto de pesos 240063,3983.

EJERCICIOS

1°. ¿Cuántos pesos forman tres milésimos, más ochenta y cinco centésimos, más tres mil ocho diez milésimos, más diez mil siete millonèsimos y más cinco millones cuatro cienmilésimos de peso?

2°. El contenido de una pipa de vino se distribuye en 4 damajuanas y en tres botellas; en la primera damajuana se colocaron 8.36 litros de vino, en la segunda, 15,005, en la tercera, 12,0004 y en la cuarta 10.25; en las botellas se colocaron 0,75 de litro en cada una, ¿cuánto vino contenía la pipa?

3°. En una feria, un mercachifle ganó tres pesos y ocho milésimos en la venta de unos artículos; mil ocho diezmilésimos en la venta de otros, y por último ganó un millón tres mil cinco milésimos en la venta del resto de las mercaderías que había llevado, ¿cuánto ganó por todo?

4°. Un viajero caminó 150 millones 68 diezmilésimos de metro antes de almorzar; 400 millones 57 millonésimos de metro después de almorzar, y por último caminó 500 millones 6 cienmilésimos de metro después de comer ¿cuánto camino en todo el día?

Sustracción de los números decimales

175. *Para restar números decimales, se ejecuta la operación como si fuesen enteros escribiendo la coma en la diferencia á la izquierda de las décimas.*

Por ejemplo sea restar 45,236 de 125,024.

La operación se ordena lo mismo que la de los

enteros, escribiendo el minuendo y debajo el sustraendo, de modo que las unidades de un mismo orden queden unas encima de las otras, lo mismo que las comas que separan los decimales.

Así:

Minuendo	125,024
Sustraendo	45,236
Diferencia	79,788

Ahora réstese 8,25 de 15,0417

$$\begin{array}{r} 15{,}0417 \\ 8{,}2500 \\ \hline 6;7917 \end{array}$$

En este caso, al sustraendo le hemos agregado dos ceros á la derecha de los decimales para que tenga tantas cifras de esta clase como el minuendo, lo que no altera el valor de aquel número (**171**).

Réstase 25.0068 de 167.8

$$\begin{array}{r} 167.8000 \\ 25.0068 \\ \hline 142.7932 \end{array}$$

En este caso le hemos agregado al minuendo tres ceros para que tenga tantas cifras decimales como el sustraendo, con lo cual no hemos alterado su valor (**171**).

Es conveniente, pues, antes de proceder á una sustracción, igualar el número de cifras decimales del minuendo y sustraendo.

Cuando se quiere restar un número decimal de un número entero, se coloca una coma á la derecha del entero y después tantos ceros como cifras decimales tenga el sustraendo, con lo que tampoco se altera el valor del entero (**171** cons).

Por ejemplo, para restar 2.005 del entero 8 se procederá así:

	8.000
	2.005
Diferencia	5.995

Observación: Puede aplicarse á la adición y sustracción de los números decimales todo cuanto se ha dicho en las lecciones V y VI con respecto á los números enteros.

PROBLEMAS

1.° Un empleado que gana diariamente $ 2.87, gasta en el almuerzo $ 0.46, en la comida 0.758, en el alojamiento 0.406, en cigarros 0.0405; ¿cuánto le queda para todos los otros gastos indispensables?

	0.46
	0.758
	0.406
	0.0405
	1.6645
	2.87
Resultado	1.2055

Le queda para los otros gastos un peso y dos mil cincuenta y cinco diezmilésimos de peso.

Obsérvase que en este ejemplo no se han escrito los ceros necesarios para igualar el número de cifras decimales, y es porque en la práctica generalmente, no se colocan más que mentalmente dichos ceros.

2.° Un capital compuesto de $ 37800,025 fuè repartido entre tres personas, de modo que la la primera llevó $ 14000,05 y la segunda $ 12136,0008: ¿cuánto le tocó á la tercera?

14000,05
12136,0008
26136,0508
37800,025
11663,9742

A la tercera persona le tocó once mil seiscientos sesenta y tres pesos con nueve mil setecientos cuarenta y dos diesmilésimos de peso.

3° Un comerciante debe $ 58415,002, y para satisfacer esa deuda cuenta con las existencias de su casa, que están avaluadas en 32617,54, y con 47000,6 que le deben varios de sus clientes, ¿qué cantidad de pesos tiene á su favor dicho comerciante?

32617,54
47000.6
79618,14
58415,002
21203.138

Le queda un capital compuesto de 21 mil 203 pesos con 138 milésimos de peso.

EJERCICIOS

1.º ¿Cuál es la diferencia que hay entre una unidad entera y tres mil quince millonésimas de otra?

2.º Tres personas hicieron sociedad. La primera, concurrió con un capital de $ 3500,025; la segunda, con 2836,17, y la tercera, concurrió con lo que faltaba para completar 10000 pesos.

¿Cuánto dió la tercera persona?

3.º La suma de dos números es 13,0017; el menor es 4.0000086: ¿Cuál es el otro?

4.º Las entradas que por diferentes conceptos ha tenido este año un estanciero, han sido de $ 17819.146, y los gastos de $ 6315,0095; ¿cuánto ha ganado este año el referido estanciero?

LECCIÓN XVIII

Multiplicación de los números decimales

176. En la multiplicación de números decimales, distinguiremos dos casos: 1º. *multiplicar un número decimal por un entero ó vice-versa;* 2º. *multiplicar un número decimal por otro decimal.*

177. 1er. Caso.—Multiplicar 7.325 por 26.

El producto de 8.325 por 26, se obtendrá repitiendo el número 8.325 como sumando 26 veces (**60**), cuya suma tendrá tres cifras decimales (**174**), es decir, tantas cuantas tiene el multipli-

cador; luego el producto de 8.325×26, se puede obtener multiplicando los dos números como si fuesen enteros y separando del producto tantas cifras decimales cuantas hay en el factor decimal. Así:

$$\begin{array}{r} 8.325 \\ 26 \\ \hline 49950 \\ 16650 \\ \hline 216,450 \end{array}$$

En efecto, el producto de 8325 milésimas por 26 enteros será un número exacto de milésimas; luego, la última cifra de la derecha de dicho producto, expresará milésimas: por tanto debo separar tres cifras decimales (**167**).

Como que en cualquier otro ejemplo se puede hacer igual raciocinio, se infiere que

Para multiplicar un decimal por un entero, se multiplican los dos números como si fuesen enteros y de la derecha del producto, se separan tantas cifras decimales cuantas tenga el multiplicando.

La multiplicación de un entero por un decimal, se ejecuta del mismo modo: pues

$$8,325\times26=26\times8,325 \quad (\mathbf{66}).$$

CASO PARTICULAR. *Para multiplicar un decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros se corre la coma tantos lugares á la derecha como ceros acompañan á la unidad* (**173**).

178. OBSERVACIÓN. Como que los números fraccionarios decimales no son más que un caso particular de los quebrados ordinarios (**110**), las

propiedades y reglas relativas á aquellos son también aplicables á éstos. Así veremos que

$$8.325\times26=\frac{8325}{1000}\times26=\frac{8325\times26}{1000}$$

es decir, que se deben multiplicar los dos números como si fuesen enteros y dividir su producto por 1000 (**173**), conforme con la regla que hemos dado.

179. 2°. Caso. —Multiplicar 36.45 por 8.6.

Multiplicar 36.45 por 8.6 es tomar las 86 décimas de 36.45 (**60**) un décimo de 39.45 es un número diez veces menor que 36.45, es decir, que será 3.645. Luego, los 86 décimos se obtendrán multiplicando 3.645 por 86, así:

```
  3.645
     86
 ------
  21870
 29160
 ------
313,470
```

De modo, pues, que el producto de 36.45 por 8.6, es igual 313,470, cuyo resultado lo hemos obtenido multiplicando los dos números decimales como si fuesen enteros y separando del producto tres cifras decimales, es decir, tantas cuantas hay en los dos factores dados.

Luego, *para multiplicar un número decimal por otro también decimal, se multiplican como si fuesen enteros, y del producto se separan de derecha á izquierda, tantas cifras decimales cuantas hayan*

en el multiplicando y en el multiplicador.

Por ejemplo: multiplicase 8.436 por 25.7. Tenemos que

$$8.436 \times 25.7 = \frac{8436}{1000} \times \frac{257}{10} = \frac{8436 \times 257}{10000}:$$

cuyo resultado confirma la regla general que acabamos de dar.

EJEMPLOS

1º.	365.024	2º.	261.42
	85.26		0.0051
	2190144		26142
	730048		130710
	1825120		1.333242
	2920192		
	31121.94624		
3º.	1400.2	4º.	0.23004
	0 2001		0.0026
	14002		138024
	28004		46008
	280.18002		0,000598104

Obsérvase que en el 4º. ejemplo el producto no tiene suficiente número de cifras para que se puedan separar las necesarias, por lo que ha sido preciso agregar á la izquierda tres ceros y y uno más para ocupar el lugar de las

unidades enteras, cuyo procedimiento puede comprobarse transformando los decimales en fracciones ordinarias, así:

$$\frac{23004}{100000}\times\frac{26}{10000}=\frac{23004\times26}{1000000000}=$$

$$\frac{598104}{1000000000}=0,000598104 \quad (\mathbf{173}).$$

PROBLEMAS

1°. Un agricultor ha recogido en su chacra 245,75 hectólitros de trigo, que vendió á $ 3,525 el hectólitro; 482 kilógramos de papas, que vendió á $ 0,136 el kilógramo, 179,6 kilógramos de garbanzos, que vendió á 35 el kilógramo. ¿Cuánto le produjo la venta de sus cosechas?

```
   245,75          482             179,6
    3,525          0,136            0,35
  ---------       -------         -------
   122875          2892             8980
   49150          1446             5388
  122875          482             -------
  73725           -------          62,860
  ---------        65,552
  866,26875
```

```
   866,26875
    65,552
    62,860
  -----------
   994,68075
```

Le produjo 994 pesos y 68075 cienmilésimos de peso.

2°. Un estanciero compró una fracción de campo compuesta de 1357 hectáreas y 4567 diezmilésimos de hectárea, á razón de $ 9.425 la hectárea, y otra fracción más inferior compuesta de 645 hectáreas, á razon de $ 6.1379. ¿Cuánto le costaron las dos fracciones?

```
     1357,4567            6.1379
        9,425               645
     ---------            ------
      67872835            306895
     27149134            245516
    54298268            368274
   122171103            -------
   ------------        3958,9455
   12794,0293975
```

```
   12794,0293975
    3958,9455
   -------------
   16752,9748975
```

Las dos fracciones de campo le cuestan 16752 pesos y 9748975 diezmillonésimos de pesos.

3°. Un obrero hace todos los dias cierta cantidad de escobas y plumeros que le producen 0,045 de $ 83,67; ¿cuánto le producirá su trabajo en 42 dias?

```
     83.67
     0,045
   -------
     41835
    33468
   -------
   3,76515
        42
  --------
    753030
  1506060
 ---------
 158,13630
```

Le produciría 158 pesos y 13630 diezmilésimos de peso.

EJERCICIOS

1º. Una señora quiere averiguar lo que gasta por mes, sabiendo que todos los dias compra los siguientes artículos: 5 klg. de carne á $ 0.12 el klg., 3 litros de leche $ 0.08 el litro, 4 klg. de pan á $ 0.108 el klg., en legumbres y verduras gasta diariamente $ 0.317 y artículos de almacén, como vino. aceite, arroz, azúcar, café, etc., pesos 1.6004. ¿Cuánto importan dichos gastos mensualmente.

2º. ¿Cual es el número igual á 36 veces la diezmillonésima parte de 0.00406?

3º. ¿Cuánto importan los 0.048 de 3164,19 de pesos?

4º. Se compraron 217,143 metros cuadrados de terreno á $ 0,0009 el medio metro cuadrado, ¿cuánto importa el terreno?

5º. Se ha repartido entre los 426 pobres que hay en cierta población, una cantidad de dinero

tal, que á cada pobre le tocó $ 2.00387; ¿qué cantidad de pesos se repartieron?

6°. ¿Cuánto importan los 0,0067 de 4,59 de 8359 pesos?

LECCIÓN XIX

División de los números decimales

180. En la división de los números decimales se pueden distinguir tres casos: 1°. *dividir un número decimal por un entero;* 2°. *dividir un número entero por un decimal;* 3°. *dividir un número decimal por otro decimal.*

181. 1er. Caso.—Dividir 275,0345 por 85.

```
275,0345 | 85
         |--------
 200     | 3,2357
  303    |
   484   |
    595  |
     00
```

Se trata de dividir 275 enteros y 345 diezmilésimas en 85 partes iguales, lo cual lo conseguiremos repartiendo en este número de partes cada una de las unidades de todos los órdenes que componen el número, empezando por los enteros por si sobran algunos poderlos reducir á unidades decimales, así decimos:

275 enteros entre 85 á 3; 3×85=255 á 275 que

hay en el dividendo sobran 20 unidades enteras que no pueden repartirse exactamente entre 85, pero las 20 unidades enteras valen 200 dècimas, número mayor que el divisor, luego podremos dividir las 200 décimas entre 85, y nos dará 2 décimas de cociente, cuya cifra escribiremos á la derecha de la primera, y separada de aquella por una coma para expresar que ocupa el lugar de las décimas; ahora, como 2×85= 170 décimas hasta 200, que tenemos en el segundo dividendo parcial, sobran 30, que equivalen á 300 centésimas y 3 que hay en el dividendo total, forman 303 centésimas, que divididas entre 85, dan 3 centésimas de cociente; 3×85=255, hasta 303 sobran 48 centésimas, que equivalen á 480 milésimas, más 4 que tenemos en el dividendo total, forman 484 milésimas, que divididas entre 85 dan 5 de cociente: 5×85=425, á 484 van 59 milèsimas que sobran, las que equivalen á 590 diezmilésimas, y más 5 que hay en el dividendo, forman 595, que divididas entre 85, corresponden á 7 diezmilésimas justas, porque 7×85=595.

Luego el cociente que resulta de dividir 275,0345 por 85, es 3 enteros y 2357 diezmilésimas.

182. Del procedimiento seguido en el ejemplo anterior que es aplicable á cualquier otro caso, se deduce que: *para dividir un número decimal por otro entero, se practica la división como si el dividendo fuese entero, colocando la coma en el cociente al bajar la primera cifra decimal del dividendo.*

Obsérvase también que al considerar el dividendo como entero, lo hemos hecho 10000 veces mayor, luego el cociente resultará también 10000 veces mayor que el que buscamos, (**123** obs. 1ª.) luego dividiendo el cociente por 10000 obtendre-

mos el verdadero, y como este raciocinio es aplicable á todos los casos, también podemos decir que:

Para dividir un número decimal por otro entero, se practica la división como si el dividendo fuese entero, y de la derecha del cociente se separan tantas cifras decimales cuantas tenga el dividendo.

EJEMPLOS

```
1º.  7378,81 | 859          2º.  45,648 | 24
      5068   |-----               216   |------
       7731  | 8,59               0048  | 1,902
        000                           0

3º.  17,008 | 11            4º.  9,124 | 5
       60   |------               41   |------
        50  | 1,546                12  | 1,824
         68                         24
          2                          4
```

Los dos últimos ejemplos nos han dado un cociente decimal inexacto, el primero de 1,546 con $\frac{2}{11}$ de milésimo y el otro de 1,824 con $\frac{4}{5}$ de milésimo, es decir, que los dos cocientes encontrados se diferéncian del verdadero en menos de un milésimo y si quisiéramos abtener un cociente más aproximado, es decir, con menos erorror de $\frac{1}{100000}$, no habría más que añadirle á la derecha del dividendo dos ceros lo que no alteraría su valor

(**171**), y se continuaria la división determinándose dos cifras decimales más para el cociente, así:

```
5º. 17,00800 | 11            6º. 9,12400 | 5
             |---------                  |--------
     60      | 1,54618           41      | 1,8248
      50                          12
       68                          24
        20                          40
         90                          0
          2
```

De este modo se ha obtenido el cociente de 17,008 por 11 con menos error de una cienmilésima, y aun podríamos aproximarnos más agregándole nuevos ceros á la derecha del dividendo, con lo que en algunos casos, como en la división 6ª., podremos obtener un cociente decimal exacto, ó cuando no, tan aproximado cuanto se quiera.

Por ejemplo; hállase el cociente de 45,24 por 17 con menos de una cienmillonésima de diferencia.

```
45,24000000 | 17
            |------------
112         | 2,66117647
 104
   20
    30
    130
     110
      80
      120
        1
```

A fin de que el cociente se diferencie del verdadero en menos de una cienmillonésima, es nece-

sario seguir la división hasta que tenga ocho cifras decimales el cociente, para lo cual también debe tenerlas el dividendo, por cuya razón le hemos agregado seis ceros á su derecha con lo que no se ha alterado su valor (**171**).

En la práctica sólo se agregan mentalmente los ceros á la derecha del dividendo.

Por ejemplo:

```
146,0045      | 23
 80           |---------------
  110         | 6,3480217391304
   184
    050
      40
      170
        90
        210
          30
           70
           100
             8
```

183. 2º. Caso. Dividir 246 por 0,024.

Multiplicando el dividendo y el divisor por 1000 el cociente no varía (**106**); y como el divisor resulta entero, queda la operación reducida á dividir dos números enteros, es decir que tendremos

$$246:0{,}024=246\times1000:0{,}024\times1000=$$
$$246000:24=10250$$

También tenemos que $0{,}024=\frac{24}{1000}$ (**168**), así pues; (**161**.

$$246 : \frac{24}{1000} = 246 \times \frac{1000}{24} \times \frac{246000}{24} = 246000 : 24$$

Luego, pues, *para dividir un número entero por un decimal, se multiplica el dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor y quedará este caso reducido á dividir dos números enteros.*

184. OBSERVACIÓN. Como todo número puede considerarse como decimal (**171** cons.) colocándole una coma á la derecha y después cuantos ceros se quiera resulta que para aproximar por decimales un cociente inexacto de dos números enteros, bastará colocar una coma después del cociente entero y un cero á la derecha del último residuo, continuándose la división, añadiendo siempre ceros á la derecha de los residuos que vayan resultando.

Sea dividir 9324 p r 23:

```
9324    | 23
        |-----------
 124    |405,391304
   90
   210
     30
      70
       100
         8
```

Al encontrar el cociente entero 405 hemos colocado la coma y un cero á la derecha del residuo 9, formándose el número 90 dècimas, que divididas por el divisor 23, da 3 décimas de cociente y sobran 21; á este resto se le agrega otro

cero y tendremos 210 centésimos, que divididos entre 23, dan 9 centésimos de cociente y 3 de residuo; á este resto se le agrega otro cero, etc., prosiguiendo así hasta obterner la aproximación que se quiera.

185. 3er. CASO.—Dividir 42,0915 por 2,415.

Si multiplicamos dividendo y divisor por 1000, el cociente no se altera (**106**), y la operación se convierte en dividir 42091,5 por 2415. es decir, en la división de un decimal por un entero que es el primer caso que hemos estudiado.

Luego, pues, *para dividir un número decimal por otro tambien decimal, se multiplica dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor; y quedará este caso reducido al primero, ó á dividir un número entero por otro.*

EJEMPLOS

Dividir 42,0915 por 2,415

```
42091,5   | 2415
          |-----------
17941     |17,429192...
  10365
    7050
    22200
      4650
      22350
        6150
        1320
```

Hemos hallado el cociente de los números propuestos con menos error de una millonésima.

2°. Divídase 45.36 por 0,246

```
45360   |246
        |----------
2076    |184,3902
 1080
   960
   2220
    00600
      108
```

3°. Dividir 25,8 por 0,0049

```
258000  | 49
        |------------
 130    | 5265,306122
  320
   260
    150
     300
       60
       110
        120
         22
```

Hemos hallado el cociente con menos de una millonésima de error.

186. Observación.—La regla que hemos deducido en el número anterior para el 3er. caso de la división de números decimales, puede también obtenerse transformando los quebrados decimales en ordinarios, por ejemplo, dividiendo 25,042 por 0,47. tenemos que

$$25,042:0,47=\frac{25042}{1000}:\frac{47}{100}=\frac{25042}{1000}\times\frac{100}{47}=\frac{2504200}{47000}=$$

$$\frac{2504200:1000}{47000:1000}=\frac{2504,2}{47}=2504,2:47$$

Cuyo resultado comparado con los datos, nos dice también que, *para dividir dos números decimales, se multiplican ambos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor, con lo cual la operación se reduce después á dividir un decimal por un entero, á ó dividir dos enteros.*

PROBLEMAS

1°. Un comerciante compró en 835,042 pesos, 1506,35 hectólitros de carbón; ¿cuánto pagó por hectólitro?

```
83504,2   | 150635
 818670   |--------
  654950  | 0,5543
   524100
    72195
```

Resultado que pagó por hectólitro $ 0,5543.

2°. Una señora gastó $ 35,80 en un género de seda que le costó $ 1,325 el metro; ¿cuántos metros compró?

```
35800     | 1325
 9300     |----------
  2500    | 27.018867
  11750
   11500
     9000
     10500
      1225
```

Compró 27,018867 metros.

EJERCICIOS

1º. Se compraron cierta cantidad de canastos de Champagne á $ 36,75, los que se pretenden vender ganando en cada uno $ 3,25; ¿cuántos se tendrán que vender para ganar $ 470,125?

2º. ¿Cuántos hectólitros de trigo podrán comprarse con $ 3456,028, costando el hectólitro de trigo $ 3,86?

LECCIÒN XX

Reducción de quebrados ordinarios á decimales y vice-versa

187. Reducir un quebrado ordinario á decimal, es transformar el quebrado ordinario en una fracción decimal equivalente, ó que se diferencia de ella en menos de una cantidad dada por pequeña que sea.

Todo quebrado ordinario hemos visto (**113**) que es una división indicada; y para hallar el cociente con toda la aproximación que se quiera se ha visto (**184**), que se continúa la división agregando un cero á la derecha de cada residuo. Luego:

Para reducir un quebrado ordinario à decimal, se divide el numerador por el denominador y el cociente se aproxima por decimales, como se ha dicho en el número **184**.

1°. **Hállese la fracción decimal equivalente á $\frac{7}{8}$**

```
70 | 8
60 |------
 40  0785
  0
```

Según la regla que acabamos de dar, el quebrado $\frac{7}{8}$ es equivalente á la fracción decimal 0,875.

En efecto: $\frac{7}{8}$, como se sabe, representa el cociente de dividir 7 por 8 (**113**); pero 7 unidades enteras no alcanzan para repartir entre 8; así pues pondremos 0 en el cociente; ahora, como 7 enteros equivalen á 70 décimos (**166**) repartiremos los 70 décimos entre 8, con lo que obtendremos 8 décimos de cociente y 6 de residuo, que equivalen á 60 centésimos; los que repartidos entre 8 da 7 de cociente y 4 de residuo, que equivalen á 40 milésimos; los que repartidos entre 8 tocan á 5. Luego, pues, el quebrado ordinario $\frac{7}{8}$ vemos que es equivalente á la fracción decimal exacta 0,875.

2°. Conviértase el quebrado $\frac{4}{7}$ en fracción decimal.

```
40       | 7
 50      |---------------
  10     | 0,57142857....
   30
    20
     60
      40
       50
        1
```

Así pues, $\frac{4}{7}$=0,57142857 cuyo cociente observamos que no es exacto ni podrá serlo nunca por mucho que se prolongue la división, porque vemos que se repiten los restos y repitiéndose éstos se repiten los dividendos parciales que ellos forman; y, por consiguiente, tienen forzosamente que repetirse las cifras del cociente, formando así períodos compuestos de las cifras 571428 que se repiten indefinidamente.

Luego el quebrado ordinario $\frac{4}{7}$ no puede expresarse exactamente por una fracción decimal, pero podemos representar su valor con toda la aproximación que se quiera.

3º. Redúzcase el quebrado $\frac{7}{12}$ en fracción decimal.

```
70    | 12
100   |--------
 40   | 0,5833
  40
```

El quebrado $\frac{7}{12}$ observamos que tampoco puede expresarse exactamente por una fracción decimal, pues el residuo 4 se repite indefinidamente y así también la cifra 3 del cociente.

188. De los ejemplos precedentes, se deduce que, las fracciones decimales pueden ser *exactas* y *periódicas*, así pues llamaremos:

FRACCIÓN EXACTA *á la que contiene un número limitado de cifras*, como por ejemplo 0,875: 0,75 0,25 etc., y

FRACCIÓN PERIÓDICA *á la que tiene un número ilimitado de cifras*, como por ejemplo, 0,571428-571428..... y 0,58333.....

Las *fracciones periódicas* se subdividen en *puras* y *mixtas*.

Llámase fracción PERIÓDICA PURA *á la que el periodo principia desde la coma*, como por ejemplo 0,3636.. ..

Llámase fracción PERIÓDICA MIXTA, *á la que el periodo no principia desde la coma*, por ejemplo 0,27333... .

Reducción de fracciones decimales à quebrados ordinarios

189. *El quebrado ordinario equivalente á una fracción decimal, se llama quebrado generador ó fracción generatriz.*

Así los quebrados $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{12}$, son respectivamente los *quebrados generadores* de los decimales 0,75, 0,875, 0,5714285,7...y 0,58333...

En la determinación de los quebrados ordinarios equivalentes á fracciones decimales dadas, se distinguen los tres siguientes casos:

1°. *Que la fracción decimal propuesta, sea exacta.*

2°. *Que la fracción decimal dada, sea periódica pura.*

3°. *Que la fracción decimal propuesta, sea periodica mixta.*

190. 1er. Caso—Para reducir un número decimal exacto á quebrado ordinario, basta poner por numerador el número dado con supresión de la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene (**168**).

$$\text{Así, } 0{,}246 = \frac{246}{1000} = \frac{123}{500}\,;$$

$$0{,}08 = \frac{8}{100} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}\,; \qquad 0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}\,;$$

$$0{,}064 = \frac{64}{1000} = \frac{32}{500} = \frac{16}{250} = \frac{8}{125}$$

Observaciones—Si una fracción decimal es exacta, el denominador del quebrado generador solo será divisible por 2 y por 5 ó por uno de éstos solamente, porque el denominador de dicha fracción generatriz es, según acabamos de ver, la unidad seguida de ceros; por consiguiente, solo puede ser divisible por 2 ó por 5, más, al simplificar el quebrado puede desaparecer alguno de los dos factores y el denominador del quebrado irreducible ser solamente divisible por uno de ellos.

191. 2°. Caso - Veamos la fraccion 0,354 354 354. . . .

Llamando F á la fracción generatriz ó quebra-

do generador que nos proponemos hallar, tendremos que:

$$F = 0{,}354354354\ldots$$

Si una fracción generatriz es igual á 0,354 354 354.....; 1000 fracciones generatrices se expresarán así:

1000 F=354,354354354..... (**173**) ahora restando ordenadamente de esta igualdad la anterior, tendremos que (*)

$$999\ F = 354$$

luego si 999 veces la fracción generatriz que buscamos es igual á 354, una sola será

$$F = \frac{354}{999}$$

Este resultado nos dice que

Para reducir una fracción decimal periódica pura, á quebrado ordinario, se pone por numerador el periodo y por denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo.

EJEMPLOS

1°. $0{,}603603\ldots = \frac{603}{999} = \frac{67}{111}$

(*) Observase al restar, que la parte decimal del minuendo es exactamente igual á la del sustraendo, pues ambas se componen del periodo 354 repetido un número indefinido de veces; por consiguiente, al restarse una de otra, la parte decimal se reduce á 0.

2°. $0,666\ldots \ldots = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

3°. $0,81428571\ldots = \frac{814285}{999999} = \frac{5}{7}$

4°. $0,2424\ldots\ldots = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$

Observación El denominador de un quebrado ordinario equivalente á una fracción decimal periódica pura, nunca podrá ser divisible por 2 ni por 5 porque según acabamos de ver el denominador está formado de puros nueves, luego no puede ser divisible por 2 ni por 5 ni aun después de simplificado, puesto que con la simplificación no pueden aparecer nuevos factores, sino por el contrario pueden desaparecer algunos.

192. 3er Caso. Propongámonos hallar el quebrado generador de la fracción decimal periódica mixta 0,453793783. ...

Tenemos que

$$F = 0,45379379379\ldots\ldots$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 100000 hallaremos el valor de

$$100000\ F = 45379,379379\ldots\ldots$$

ahora multiplicando por 100 los dos miembros de la primera igualdad, tendremos:

$$100\ F = 45,379379\ldots\ldots$$

y restando ordenadamente la tercera igualdad de la segunda resultará que

$$99900\ F = 45379 - 45$$

luego pues

$$F = \frac{45379 - 45}{99900}$$

Cuyo resultado nos dice que

Para convertir una fracción decimal periódica mixta, en quebrado ordinario, se pone por numerador la parte no periódica seguida del primer periodo, menos la parte no periódica, y por denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo seguidos de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

EJEMPLOS

1º. $0{,}234646\ldots\ldots = \frac{2346-23}{9900}$

2º. $0{,}5243243\ \ldots\ldots = \frac{5243-5}{9990}$

3º. $0{,}4813571357\ldots = \frac{481357-48}{999900}$

Observación.—El denominador de un quebrado ordinario equivalente á una fracción decimal periódica mixta, contiene á los

factores 2 y 5 ó à uno de ellos solamente y además algún otro factor diferente

En efecto, el numerador de dicho quebrado no puedo terminar en cero, pues para que el numerador 23456—23 del primer ejemplo terminase en cero, era preciso que las cifras 6 y 3 fuesen iguales y en tal caso la fracción decimal 0234646... ... tendría en su parte no periódica una sola cifra decimal, mientras que nosotros hemos supuesto que tiene dos. Luego es evidente que el numerador del quebrado ordinario equivalente á una fracción decimal periódica mixta, no podrá ser nunca divisible por 2 y por 5 á la vez, solo si, por cualquiera de ellos; así pues, simplificando este quebrado todo lo posible. el denominador que resulte contendrà por lo menos á uno de los factores 2 y 5, además de algùn otro, pues si no tuviese más que estos dos la fracción sería exacta que es contra la hipótesis.

193. De las OBSERVACIONES que hemos hecho al fin de cada caso de reducción de fracciones decimales á quebrados ordinarios. se deduce facilmente

1°. *Que si los factores simples del denaminador de un quebrado ordinario irreducible, son 2 y 5 ó uno de èstos solamente, la fracción decimal equivalente será exacta.*

2°. *Si entre los factores simples del denominador de un quebrado ordinario irreducible no se halla el 2 ni el 5, la fracción decimal equivalente, serà periódica pura.*

3°. *Si los factores simples del denominador de un quebrado irreducible son 2 y 5, ó uno de estos y algún otro factor diferente, la fracción decimal equivalente será periódica mixta.*

EJEMPLOS

$\frac{3}{4}, \frac{7}{16}, \frac{13}{20}$ producen fracciones decimales exactas

$\frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{13},$ id. id. periódicas puras

$\frac{5}{12}, \frac{7}{15}, \frac{193}{425}$ id. id. periódicas mixtas.

OBSERVACIONES FINAL. Si en alguno de los dos ùltimos casos que hemos considerado en la reducción de fracciones decimales á quebrados ordinarios equivalentes, el número decimal dado, fuese mixto, para hallar la fracción generatriz equivalente supondremos los enteros unidos á la parte no periódica, ó formando ésta si la tracción propuesta es periódica pura; pero despuès de los nueves del denominador no se escribirán más ceros que los que correspondían por la parte no periódica que tenía la fracción decimal antes de unirle los enteros, ó ninguno si es periódica pura la fracción decimal que acompaña á la parte entera del número. Así:

$$8,2424\ \ldots = \frac{824-8}{99}$$

en efecto

$$8,2424\ldots = 10 \times 0,82424\ldots = \frac{824-8}{990} \times 10 = \frac{824-8}{99}$$

Del mismo modo veremos que

$$12,3644\ldots\ = \frac{12364-1236}{900}$$

porque

$$12,3644\ldots\ldots = 100 \times 0,123644\ldots = \frac{12364-1236}{90000}$$

$$\times 100 = \frac{12364-1236}{900}.$$

LECCION XXI

Números concretos

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL DE PESAS Y MEDIDAS

NOCIONES PRELIMINARES

194. Para determinar el valor de una cantidad cualquiera, se la compara con otra conocida de la misma naturaleza, á la cual se le llama UNIDAD (**3**).

Una cantidad queda determinada númericamente midiéndola con su unidad concreta respectiva, para lo cual, como hay distintas especies de cantidades, son también distintas las especies de unidades concretas para medirlas.

Medir una cantidad es averiguar la relación que existe con la unidad de la misma especie.

Como, por ejemplo: para medir la longitud de una tabla se aplica á lo largo sucesivamente el metro, y si resulta que puede aplicarse cuatro veces, diremos que la longitud de la tabla es de cuatro metros.

Cualquiera cantidad determinada puede servir de unidad para medir otras de la misma especie, y de ahi nacieron los diferentes sistemas de pesas y medidas usados en cada país.

Esta diversidad de sistemas de pesas y médidas que cada nación tenia, causaban inmensos

perjuicios á la agricultura, á la industria y al comercio en general, por cuya razón, y para evitarlos, la Asamblea Nacional francesa, el 8 de Mayo de 1790, decretó la uniformidad de pesas y medidas para todo el Reino, encargando á la Academia de Ciencias la formación del nuevo sistema. Aquella corporación con el objeto de darle toda la universalidad posible, adoptó para expresar sus diversas unidades nombres griegos y latinos, y tomó como ***unidad fundamental ó base*** el METRO, que representa la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador al polo Norte, contada sobre el meridiano terrestre que pasa por París.

Esos cálculos fueron practicados por una comisión de matemáticos de varias naciones europeas, los que se basaron en la mensura directa que hicieron del arco de meridiano comprendido entre Barcelona y Dunkerque.

De esta longitud, y teniendo en cuenta el aplastamiento de la Tierra en los polos, dedujeron que el cuadrante del expresado meridiano se compone de 5130740 *toesas* (medida francesa antigua) tomándose para formar el METRO una diezmillonésima parte de dicha distancia, ó sea

0,513074 de toesa=1 metro.

Por ley de 10 de Diciembre de 1799 fué aprobado en Francia el sistema métrico decimal de pesas y medidas, confeccionado por la Academia de Ciencias de Paris, en unión de varios matemáticos de diferentes nacionalidades.

Sin embargo, y á pesar del citado decreto de la Asamblea francesa del 8 de Mayo de 1790, el uso del nuevo sistema de pesas y medidas no se hízo exclusivamente obligatorio en Francia hasta el 1°. de Enero de 1840.

Pocos años después, fueron reconocidas las inmensas ventajas de este sistema sobre todos los antiguos, y su uso fué

decretado en casi todos los países civilizados de Europa y América.

En esta República se adoptó el sistema métrico decimal de pesas y medidas por ley de 20 de Mayo de 1862. pero únicamente se hizo obligatorio desde el primero de Julio de 1867 según decreto del 3 Noviembre de 1866.

195. Las unidades concretas necesarias para medir toda clase de cantidades, se reducen á las ocho especies siguientes: unidades de *longitud, de capacidad para líquidos y áridos*, de *peso*, de *superficie*, de *volumén*, de *dinero*, de *tiempo* y *angulares*.

Las unidades de tiempo no se han podido ajustar al sistema métrico, porque ellas están determinadas por la naturaleza, y son las mismas en todos los países civilizados del mundo.

Las unidades de dinero toman el nombre de monedas, y cada país les da su valor legal, lo que constituye su *sistema monetario*.

Unidades principales del sistema métrico decimal

196. *Llámase sistema métrico decimal de pesas y medidas, al conjunto de unidades ó medidas legales que tienen por base el metro y que están subordinadas las unas á las otras según la ley de la numeración decimal.*

Las principales unidades de este sistema son las siguientes:

El METRO, que es la unidad fundamental de todo el sistema y la principal de las medidas de longitud.

El LITRO, que es la unidad principal de las medidas de capacidad para líquidos y áridos, el cual es equivalente al volúmen de un cubo que tenga por arista la décima parte de un metro.

El GRAMO, que es la unidad principal para los pesos, el cual es equivalente á lo que pesa en el vacio, y á la temperatura de cuátro grados centígrados, un volúmen de agua destilada igual á un cubo cuyo lado sea la centésima parte de un metro.

Las unidades principales para las superficies, son el METRO CUADRADO y el ÁREA. La primera se usa para medir superficies de pequeña extensión, y la segunda para las agrarias: el área es un cuadrado que tiene 10 metros por cada lado.

Las unidades principales para los volúmenes son el METRO CÚBICO, que es un cubo que tiene por cada lado un metro, y el ESTERIO que es tambièn un metro cúbico destinado para medir leña.

La unidad principal de moneda es el PESO.

Los múltiplos de estas diferentes unidades, á excepción de la moneda, se forman anteponiendo á cada una las siguientes palabras griegas:

DECA,	HECTO,	KILO	y	MIRIA
diez,	*ciento,*	*mil*		*diez mil.*

Para formar los submúltiplos se anteponen á las mismas unidades las siguientes voces latinas:

DECI,	CENTI,	MILI
décimo,	*centésimo,*	*milésimo*

Medidas de longitud

197. El metro, como se ha dicho antes, es la unidad principal de las medidas de longitud, cuyos múltiplos y submùltiplos son los siguientes:

Múltiplos	Miriámetro (Mm) (*)	10000	metros
	Kilómetro (Km)	1000	»
	Hectómetro (Hm)	100	»
	Decámetro (Dm)	10	»
Unidad usual METRO (*m*)			
Submúltiplos	Decímetro (dm)	0,1	»
	Centímetro (cm)	0,01	»
	Milímetro (mm)	0,001	»

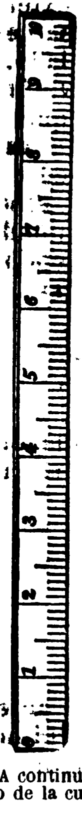


Figura número 1

UN DECÍMETRO

La figura número 1 representa un decímetro dividido en centímetros y milímetros.

Las medidas longitudinales sirven para medir distancias pero no todas estas medidas son *efectivas ó reales*, solo se construyen y emplean las autorizadas por la ley, las cuales son:

El *medio hectómetro* 5 decámetros.
El *doble decámetro* 2 decámetros.
El *decámetro* (cadena de agrimensor).
El *medio decámetro* (poco usado) 5 metros
El *doble metro* 2 metros.
El *metro.*
El *medio metro* (poco usado) 5 decímetros.
El *doble decímetro* 2 decímetros.
El *decímetro.*

Las tres primeras son usadas generalmente por los Agrimensores, Arquitectos é Ingenieros para medir longitudes sobre el terreno, y las dos últimas, subdivididas en milímetros y medios milímetros, se usan para medir líneas sobre el papel donde se construyen los planos.

(*) A continuación de cada unidad métrica indicamos la abreviatura por medio de la cual generalmente se la designa

El metro se usa para medir la longitud de las telas, etc.

Modo de escribir y leer cantidades métricas

198. Según la tabla de las medidas de longitud que acabamos de exponer, observamos que cualquiera de las unidades expresadas equivalen á 10 unidades de la clase inmediata inferior, ó lo que es lo mismo, 10 unidades de una clase cualquiera representan ó forman una de la clase inmediata superior, lo mismo que sucede con los diferentes órdenes de unidades de los números decimales. Así pues, tomando por unidad el *metro*, podremos escribir cualquiera cantidad métrica del mismo modo que se escriben los números decimales, colocando la coma á la derecha de la cifra que expresa los metros, teniendo presente que la cifra á la derecha de la coma representará siempre décimos de metro ó sean decímetros, la segunda centésimos de metro ó sean centímetros, la tercera milésimos etc., así como la segunda cifra á la izquierda de la coma expresará siempre decenas ó sean decámetros, tomándose como se ha dicho por unidad principal el metro: la tercera expresará centenas ó sean hectómetros; la cuarta millares ó sean kilómetros, y así sucesivamente.

Del raciocinio que acabamos de hacer se deduce la siguiente:

REGLA—Para escribir una cantidad métrica cualquiera, *se escriben de izquierda á derecha las cifras que expresan las unidades concretas de cada clase, unas al lado de las otras, principiando por*

la de clase superior hasta escribir la de las unidades simples, cuidando de ocupar con ceros los lugares intermedios donde falten unidades de alguna clase. A la derecha de la cifra que exprese las unidades simples se coloca una coma y enseguida se escriben los decimetros, después los centimetros, etc.

Por ejemplo: 8 hectómetros, 2 decámetros, 5 metros, 7 decímetros y 9 centímetros se escribirá de este modo

825,79 metros

Para expresar 8 miriámetros, 3 hectómetros, 6 metros y 4 milímetros, se escribirá

80306,004 metros

Cuya cantidad la hemos escrito empezando por la cifra 8 que representa la clase superior de unidades: á la derecha de la cifra 8 se coloca un cero porque la cantidad propuesta carece de kilómetros: á la derecha de este cero se coloca la cifra 3 que representa los hectómetros y como no tenemos decámetros colocamos un cero á la derecha del 3 y en seguida la cifra 6 que expresa los metros ó sean las unidades simples: después se escribe la coma y enseguida dos ceros ocupando el lugar de los decímetros y centímetros de que carece el número propuesto y por último la cifra 4 que expresa los milímetros, quedando así escrito el número dado, de acuerdo con la regla precedente.

Otros ejemplos

1º.—1 kilómetro, 4 decámetros y 9 centímetros, se escribirá

1040,09 metros

2°.—36 miriámetros, 8 metros y 2 milímetros se escribe asi:

360008,002 metros

3°.—845 kilómetros y 14 metros se escribirá así:

845×014 metros

4°.—35 milímetros se escriben así:

0,035

Puede suprimirse la palabra metro escrita al final del número, colocando una *m* á la parte superior y á la derecha de la cifra que representa las unidades simples ó sean los metros: así las cantidades expresadas en los ejemplos anteriores se pueden escribir de este modo:

1°—1040,^{m}09; 2°.—360008,^{m}002

3°.—845014^{m}; 4°—0,^{m}035

199. Las cantidades métricas se pueden leer de tres modos diferentes:

1°. Expresando el valor absoluto de cada cifra y la denominación de la clase de unidad que representa.

2°. Como si fuesen dos cantidades, leyendo primero la que está á la izquierda de la coma dándole la denominación de metros y enseguida la que está á la derecha dándole la denominación correspondiente á la última cifra.

3°. Como si fuese una sola cantidad expresando al fin la denominación de la clase de unidad que representa la última cifra.

Por ejemplo; la cantidad 427,^{m}35 se puede leer de los tres modos siguientes:

1°. Cuatro hectómetros, dos decámetros, siete metros, tres decímetros y cinco centímetros.

2°. Cuatrocientos veinte y siete metros, treinta y cinco centímetros.

3°. Cuarenta y dos mil setecientos treinta y cinco centímetros.

La primera lectura es evidente, por lo tanto no necesita demostrarse.

La segunda y tercera se justifica por medio del siguiente raciocinio:

Un hectómetro equivale á 10 decámetros, luego 4 hectómetros representan 40 decámetros y mas 2 que hay en el número propuesto forman 42. Un decámetro equivale á 10 metros, 42 decámetros representan 420 metros y más 7 que hay en el número dado forman 427 metros.

Luego vemos que lo mismo es decir 4 hectómetros, 2 decámetros y 7 metros, que 427 metros.

Del mismo modo probaríamos que 3 decímetros y 5 centímetros equivalen á 35 centímetros, con lo cual queda justificada la segunda lectura.

En cuanto á la tercera basta observar que un metro equivale á 10 decímetros; luego 427 metros representan 4270 decímetros y más 3 que hay en el número propuesto forman 4273. Un decímetro equivale á 10 centímetros; luego 4273 decímetros forman 42730 centímetros más 5 que hay en el número dado forman 42735 centímetros, lo que justifica la tercera manera de leer las cantidades.

200. CAMBIO DE UNIDAD.

1°. Tenemos 12742^{m}93 y queremos expresar esta cantidad en kilómetros.

Sabemos que 1000 metros equivalen á un kilómetro; luego, dividiendo el número dado por 1000, el cociente representará kilómetros, y como para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares á la izquierda como ceros acompañan á la unidad, tendremos en este caso que correr la coma tres lugares á la izquierda y el número que resulte será el pedido. Así pues

$$12742,^{m}93=12,^{km}74293$$

Conviértase en milímetros 347,^{m}6.

Un metro tiene 1000 milímetros; luego, multiplicando por 1000 el número dado, el producto representará milímetros, y como para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares á la derecha como ceros acompañan á la unidad, corriendo en este caso la coma tres lugares á la derecha, el número que resulte expresará milímetros. Luego tendremos:

$$347,^{m}6=347600 \text{ mm.}$$

3°. Conviértase en kilómetros la cantidad 8,^{m}25.

Según hemos visto en el primer ejemplo, para convertir en kilómetros una cantidad expresada en metros, basta dividirla por 1000; luego

$$8,^{m}25=0,^{km}00825$$

4°. Redúzcase á milímetros la cantidad 34801 hectómetros.

Un hectómetro equivale á 100 metros; un metro tiene 1000 milímetros; luego, el número dado se tendrá que multiplicar por 100000 para reducirlo á milímetros, y resultará:

$$34801\ h^m = 3480100000\ mm.$$

Del procedimiento seguido en la resolución de los problemas anteriores, que es aplicable á cualquier otro caso que se presente, se deduce la siguiente

REGLA.—*Para referir cantidades métricas de una clase de unidades á otra si la nueva es 10, 100, 1000, etc., veces mayor que la primitiva, se corre la coma uno, dos, tres, etc., lugares hácia la izquierda, agregàndole, en caso necesario, los ceros que fuesen precisos; y al contrario, si la nueva unidad es 10, 100, 1000, etc., veces menor que la primitiva, se corre la coma uno, dos, tres, etc. lugares hácia la derecha, agregàndole, también en caso necesario, los ceros que fuesen precisos, y en cualquiera de los dos casos indicados, se le dá á la cantidad que resulte el nombre de la nueva unidad.*

Problemas sobre el metro

Las operaciones con los números que expresan cantidades métricas, se efectúan lo mismo que con los números decimales abstractos y la denominación de las unidades concretas del resultado se deduce facilmente de las condiciones del problema

PROBLEMA 1º. Un comerciante ha comprado 5 piezas de gènero cuyas longitudes son las siguientes:

36,^{m}25; 84,^{m}042; 9,^{m}58; 74,^{m}13; 45^{m}; y se quiere saber cuanto ha comprado por todo.

Se efectúa la adición de los números decimales que representan la longitud de cada pieza y la suma expresará la cantidad de género comprado.

$$\begin{array}{r} 36,25 \\ 84,042 \\ 9,58 \\ 74,13 \\ 45,\text{--} \\ \hline 249,002 \end{array}$$

Resulta que ha comprado 249 metros y 2 milimetros de género, ó sean 2 hectómetros 4 decámetros, 9 metros y 2 milímetros ó 249 mil 2 milímetros.

2º. De Melo á la Villa de Artigas hay aproximadamente unos 98654 metros, y al puente del arroyo Chuy solo hay 14560. ¿Qué distancia resulta haber entre Artigas y el citado puente del Chuy?

La diferencia entre los dos números que representan las distancias indicadas, expresará la pedida, así:

$$\begin{array}{r} 98654 \\ 14560 \\ \hline 84094 \end{array}$$

Resulta que de Artigas al puente del arroyo Chuy hay 8 Mm, 4 Km, 9 Dm y 4 m, ó sean 84094 metros, ó bien 84 Km y 94 m.

3°. Costando 67 reales el metro de cierto paño, ¿cuánto costarán 49,ᵐ25?

Si un metro cuesta 67 reales, 49,ᵐ25 costarán 49,25 veces más, luego multiplicando 67 por 46,25 el producto representará el costo de la cantidad de paño indicada. Así:

```
   46,25
      67
  ------
   34475
  29550
 -------
  329975
```

Resulta pues, que los 49,ᵐ25 de aquel paño cuestan 3299,75 reales.

4°. Habiendo pagado 36 pesos por la hechura de un kilómetro de cerco de alambre, se quiere saber cuanto costó el metro de dicho cercado.

Un kilómetro tiene 1000 metros, luego el valor de un metro de cerco, será 1000 veces menor que el de un kilómetro, así pues, dividiendo 36 pesos entre 1000 el cociente expresará el valor pedido; y como para dividir un número por la unidad seguida de ceros basta separar de dicho número tantas cifras decimales como ceros acompañan á la unidad, tendremos:

$$36:1000=0,036$$

Resulta que el metro lineal del expresado cerco, costó 0,036 de peso.

EJERCICIOS

1°. Caminando 86 metros por minuto, ¿qué

tiempo se necesitará para caminar 36 kilómetros, 8 hectómetros y 6 decámetros?

2°. ¿Cuántos metros componen 46 decámetros, 93 kilómetros, 7 miriámetros y 58 decímetros?

3°. ¿Cuántos kilómetros componen 324 metros, 56 hectómetros, 78 miriámetros y 4836 centímetros?

Medidas de capacidad

201. Las medidas de capacidad son las destinadas á medir líquidos, granos, frutas, carbón, etc., la unidad principal ya hemos dicho que es el litro, cuyos múltiplos y submúltiplos se forman lo mismo que los del metro. Así:

Múltiplos	Miriálitro	(Ml)	10000	litros
	Kilólitro	(Kl)	1000	»
	Hectólitro	(Hl)	100	»
	Decálitro	(Dl)	10	»
Unidad usual	LITRO	(l)		
Submúltiplos	Decilitro	(dl)	0,1	»
	Centilitro	(cl)	0,01	»
	Mililitro	(ml)	0,001	»

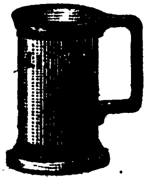


Fig. 2



Fig. 3

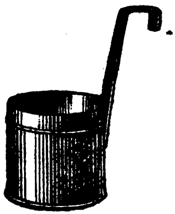


Fig. 4

No todas las medidas expresadas son *efectivas* ó *reales*, solo se construyen y emplean las autorizadas por la ley, las cuales son:

El	*hectólitro*		
El	*medio hectólitro*	5	decálitros
El	*doble decálitro*	2	»
El	*decálitro*		
El	*medio decàlitro*	5	litros
El	*doble litro*	2	»
El	*litro*		
El	*medio litro*	5	decílitros
El	*doble decílitro*	2	»
El	*decilìtro*		
El	*medio decílitro*	5	centilitros
El	*doble centílitro*	2	»
El	*centílitro*		

Estas medidas tienen todas la forma cilíndrica y se construyen de cobre, de plancha de hierro, de hierro fundido, de estaño, de hoja de lata, etc., según el destino que tengan

Así por ejemplo, las 5 primeras ó sean desde el hectólitro hasta el medio decálitro, se construyen de cobre ó de hierro cuando se destinan al comercio por mayor de vinos, aguardientes, etc., y cuando son para medir materias secas pueden construirse también de madera dura, con un ribete de hierro en la parte superior é inferior, para que conserven siempre sus dimensiones; en todos los casos la profundidad es igual al diámetro.

Las medidas de estaño toman la forma de la representada por la figura 2 y sirven para el comercio al menudeo de vinos y aguardientes, empleándose tan solo las ocho últimas, es decir, desde el doble litro hasta el centílitro.

Las medidas de hoja de lata se destinan exclusivamente para la leche y el aceite y se construyen de un diámetro igual á su profundidad, como las representadas por las figuras 3 y 4.

202. Las cantidades que expresan unidades de capacidad se escriben, leen, cambian de unidad y se opera con ellas del mismo modo que con las que representan unidades longitudinales, según las reglas dadas en los números **198**, **199** y **200**

PROBLEMAS

1.º—Cuánto importan 36 hectólitros, 45 kilólitros y 359 litros de trigo á razón de $ 4,25 el hectólitro?

Empezaremos por sumar las cantidades dadas reducidas todas á litros. Así:

3600	litros
45000	»
359	»
48959	litros

Ahora, como el precio conocido es el del hectólitro, reduciremos los 48959 litros ó hectólitros para lo cual bastará dividir dicho número por 100 y tendremos:

48959 litros=489,50 hectólitros y por último multiplicando el número que expresa los hectólitros de trigo que tenemos, por el que representa el valor de un solo hectólitro de dicho grano, obtendremos el importe del todo.

```
  489,59
    4,25
 -------
 244795
 97918
195836
--------
20807575
```

Importa el trigo $ 2080,7575.

2º.—Costando el hectólitro de maiz $ 1,25, ¿qué cantidad podré comprar con $ 8654,32?

```
8654,32   | 1,25
1154      |---------
 293      | 6923,456
  432
   570
    700
     750
      00
```

Podrán comprarse 6923,456 hectólitros de maiz, ó sean 69 miriálitros, 2 kilólitros, 3 hectólitros, 4 decálitros, 5 litros y 6 decilitros, ó bien 6 millones 923 mil 456 decilitros.

3º.—¿Cuánto pesan 8036495 litros de trigo en el supuesto de que el hectólitro de este grano pesa 78 kilogramos?

Los 8036495 litros equivalen á 80364,95 hectólitros y pesando cada hectólitro de trigo 78 kilógramos el peso de los 80364,95 hectólitros se hallará multiplicando este número por 78. Así:

80364,95
78
64291960
56255465
6268466,10

Resulta que 8036495 litros de trigo pesan 6268466,10 kilógramos.

4°. —865425 litros de trigo costaron 29424,45 pesos, ¿á cuánto sale el hectólitro?

Los 865425 litros equivalen á 8654,25 hectólitros, ahora dividiendo el número que representa el precio de todo el trigo, por el número que representa la cantidad de hectólitros de trigo comprado, el cociente expresará el valor de cada hectólitro.

29424,45	8654,25
3461700	3,4
000000	

El hectólitro de trigo resulta á $ 3.40

5°. Un viticultor ha cosechado 4836 hectólitros de vino; ¿cuántos barriles de 250 litros de capacidad, necesitará para contenerlo?

6°.—Costando el litro de cierto vino $ 0,32; ¿cuánto costará un hectólitro del mismo vino?

7°.—Costando un hectólitro de aceite $ 42,50, ¿cuál sera el precio de un litro del mismo aceite?

8°.—Un comerciante ha comprado 2517 sacos de trigo, cada uno de los cuales contiene 1 hectólitro y 25 litros; ¿cuál es la cantidad de trigo comprado?

9º.—Costando 10 centésimos de peso un litro de arvejas. ¿cuánto costarán 5 hectólitros?

10º—¿Cuántos sacos se necesitan para colocar 497 hectólitros de papas, conteniendo cada uno solo 8 decálitros 5 litros?

Unidades de pesos

203. Los múltiplos y submúltiplos de la unidad principal de peso, que como se sabe es el gramo, se forman lo mismo que los múltiplos y submúltiplos del metro y del litro, así:

Múltiplos	Miriágramos	(Mg)	10000	gramos
	Kilógramo	(Kg)	1000	»
	Hectógramo	(Hg)	100	»
	Decágramo	(Dg)	10	»

Unidad usual GRAMO (g)

Submúltiplos	Decigramos	(dg)	01	»
	Centigramos	(cg)	0,01	»
	Miligramo	(mg)	0,001	»

Pára evaluar los grandes pesos se toma por unidad el kilógramo cuyos múltiplos son los siguientes:

Tonelada métrica	(t)	1000	kg.
Quintal métrico	(Ql)	100	»
Miriágramo	(Mg)	10	»

MEDIDAS EFECTIVAS

Las pesas usuales son 24, de las cuales la mayor es de 50 kg. y la menor de un milígramo, cuyos pesos son los siguientes:

50	kilógramos	5	gramos
20	»	2	»
10	»	1	»
5	»	5	decígramos
2	»	2	»
1	»	1	»
5	hectógramos	5	centígramos
2	»	2	»
1	»	1	»
5	decágramos	5	milígramos
2	»	2	»
1	»	1	»

Figura 5

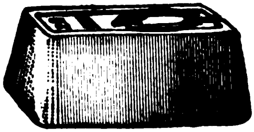
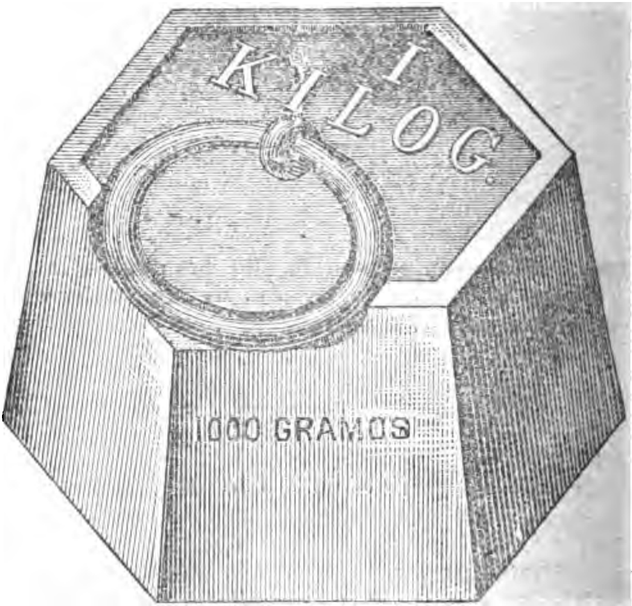


Figura 6



Las diez primeras pesas son generalmente de hierro fundido, tienen la forma de troncos de pirámide, con bases rectangulares como la de la fi-

gura 5 ó con bases exagonales como la de la figura 6.

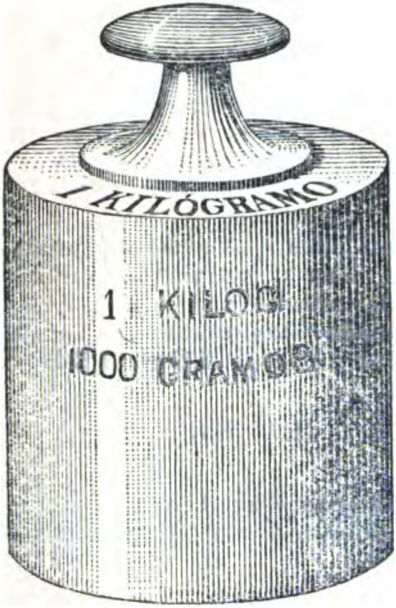


Figura 7

También se hacen de cobre de forma cilíndrica con un botón en la parte superior como la representada por la figura 7, construyéndose generalmente de este metal las comprendidas entre 20 kilógramos y 1 gramo inclusives.

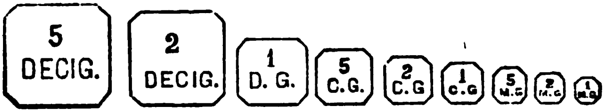


Figura 8

Las nueve pesas últimas son láminas delgadas, ordinariamente de cobre, algunas veces de plata; tienen la forma representada por la figura 8. Sirven principalmente para pesar las materias preciosas, como el oro, diamantes, etc., y en la farmacia.

Las cantidades que expresan unidades de peso, se escriben, leen y cambian de unidad y se opera con ellas del mismo modo que con las que representan unidades longitudinales, según las reglas dadas en los números **198**, **199** y **200**.

EJERCICIOS

1º. Para expresar 9 kilógramos, 5 hectógramos, 2 decágramos y 8 decígramos, se escribirá de este modo:

9520, 8 gramos

2º. Para expresar 250 toneladas métricas, 8 quintales métricos, 6 hectógramos y 9 centígramos, se escribirá:

250800600,09 gramos

Cuya cantidad puede leerse de los tres modos indicados en el número **199**; así:

1°. 250 toneladas métricas, 8 quintales métricos, 6 hectógramos, 9 centígramos.

2°. 250 millones, 800 mil 600 gramos, 9 centígramos.

3°. 25 mil 80 millones, 60 mil 9 centígramos.

Pero una cantidad grande como la que acabamos de leer, conviene más referirla á una unidad superior como el kilógramo, y en tal caso se lee así:

250 mil 800 kilógramos, 60 mil 9 centígramos.

3°. Conviértase en milígramos 25,042 kilógramos.

Un kilógramo tiene un millón de miligramos; luego, multiplicando la cantidad dada por 1000000, se obtendrá la pedida.

25,042 kg.=25042000 mg.

4°. Conviértase en quintales métricos la cantidad 200549386 gramos.

Un quintal métrico tiene 100000 gramos, luego, dividiendo por 100000 el número dado, el cociente expresará quintales métricos, así:

200549386 gramos=2005,49386 quintales métricos.

PROBLEMAS

1°. Sabiendo que con un kilógramo de harina se produce 1,25 kilógramos de pan, ¿cuántos kilógramos de harina se necesitan para hacer 463587 decígramos de pan?

2°. La báscula se usa para apreciar los grandes pesos y está dispuesta de tal modo que los objetos colocados sobre ella se equilibran con un

peso 10 veces menor; ¿que pesas se emplearán para pesar un saco de lana que pesa 83,234 kilógramos?

3°. Un kilógramo de harina hemos dicho que produce 1,25 kg de pan bien cocido, y calculando en $ 1,20 los demás gastos del panadero y utilidad en cada 100 kg. de pan, ¿á qué precio debe venderse el kilógramo de pan cuando la harina buena de cilindro vale $ 1,30 los 11 kg.?

LECCIÓN XXII

Continuación del sistema métrico decimal de pesas y medida

MEDIDAS SUPERFICIALES

204. Hemos visto en el número **196** que las unidades principales para las superficies son el *metro cuadrado* y el *área*.

El metro cuadrado es un cuadrado que tiene un metro de longitud por cada lado.

El área es un cuadrado que tiene 10 metros de longitud por cada lado.

El decímetro cuadrado, el centímetro cuadrado y el milímetro cuadrado son cuadrados que tienen respectivamente un decímetro, un centímetro ó un milímetro de longitud por cada lado.

205. *Un metro cuadrado contiene 100 decímetros cuadrados.*

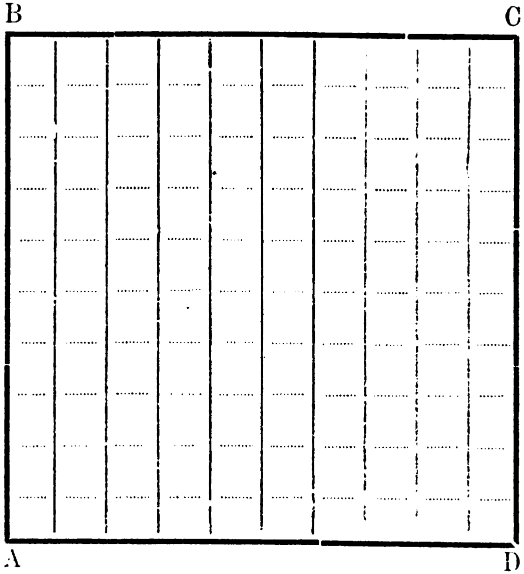


Figura 9

En efecto, supongamos que el cuadrado figura 9 representa un metro cuadrado; dividiendo los cuatro lados en diez partes iguales, cada parte representará un decímetro; ahora, uniendo con líneas todos los puntos de división opuestos, el metro cuadrado quedará como se ve en la figura 9, dividido en 10 hileras de á 10 cuadritos pequeños cada una, cuyos cuadritos tienen por lado un decímetro, luego vemos que el metro cuadrado se compone de $10 \times 10 = 100$ *decimetros cuadrados.*

Del mismo modo probaríamos que el área tiene 100 metros cuadrados, que el hectómetro cuadrado tiene 100 áreas ó decámetros cuadrados,

que el kilómetro cuadrado tiene 100 hectómetros cuadrados etc. . . . . . Asi como el decímetro cuadrado tiene 100 centímetros cuadrados, el centímetro cuadrado 100 milímetros cuadrados, el milímetro cuadrado 100 diezmilímetros cuadrados, etc., luego resultará también que 1 metro cuadrado= 100 decímetros cuadrados=10000 centímetros cuadrados=1000000 milímetros cuadrados etc. 1 Hectómetro cuadrado=100 decámetros cuadrados= 10000 metros cuadrados, etc.

206. Recíprocamente, un metro cuadrado es la diezmilésima parte de un hectómetro cuadrado, ó la centésima parte de un decámetro cuadrado; así como un decímetro cuadrado es la centésima parte de un metro cuadrado; el centímetro cuadrado la diezmilésima parte, y el milímetro cuadrado la millonésima parte del metro cuadrado.

207. Unidades de superficies m.cd.

Múltiplos	*Miriámetro cuadrado*	(Mm.cd.)	100000000
	Kilómetro cuadrado	(Km.cd.)	1000000
	Hectómetro cuadrado	(Hm.cd.)	10000
	Decámetro cuadrado	(Dm.cd.)	100
	Unidad usual *metro cuadrado* (m.cd.)		
Submúltiplos	Decímetro cuadrado	(dm.cd.)	0,01
	Centímetro cudrado	(cm.cd.)	0,0001
	Milímetro cuadrado	(mm.cd.)	0,000001

208. El *metro cuadrado* y los submúltiplos de él, se emplean para medir superficies pequeñas, como la de las huertas, solares, paredes, pisos y techos de una casa etc.

El *decámetro cuadrado* con el nombre de *área*,

y el *hectómetro cuadrado* con el nombre de *hectárea*, son las unidades agrarias que se acostumbran á tomar cuando se quiere valuar una superficie algo considerable, tomándose como submúltiplo la *centiárea*, que es igual á un metro cuadrado.

209. Se ha visto en el número **205** que una unidad superficial de un orden cualquiera vale 100 unidades del orden inmediato inferior, ó lo que es lo mismo, que se necesitan 100 unidades superficiales de un orden culquiera para formar una del orden inmediato superior, de donde resulta que todos los múltiplos se deben escribir con dos cifras, exceptuando el superior, que puede llevar una sola y los submúltiplos con otras dos cada uno.

Por ejemplo, 35 hectómetros cuadrados, 8 decámetros cuadrados y 5 metros cuadrados se escriben.

350805 metros cuadrados.

8 kilómetros cuadrados, 7 hectómetros cuadrados, 67 decámetros cuadrados, 4 metros cuadrados, 25 decímetros cuadrados y 6 centímetros cuadrados se escriben

8076704,2506 metros cuadrados.

Del mismo modo se escribirán 325 hectáreas, 8 áreas, 43 centiáreas y 4 centímetros cuadrados

32508,430004 áreas.

Recíprocamente, 13094,56 áreas, equivalen á 130 hectáreas 94 áreas y 56 centiáreas.

El número 4002953,768 metros cuadrados, equivale á 4 kilómetros cuadrados, 29 decámetros cuadrados, ó áreas, 53 metros cuadrados ó centiáreas, 76 decímetros cuadrados y 80 centímetros cuadrados. De modo, que cuando el número de cifras decimales es impar se le agregerá un cero para leerlo.

El miriámetro y el kilómetro cuadrado se toman por unidad cuando se quiere expresar superficies muy grandes, como la de un continente, la de una nación, etc.

210. CAMBIO DE UNIDAD. Se procede de una manera análoga á la explicada en el número **200.**

Por ejemplo, sea trasformar 865,4324 áreas en metros cuadrados ó centiáreas, como que una área tiene 100 centiáreas, la cantidad de áreas dada se trasformará en centiáreas multiplicándola por 100, para lo cual bastará correr la coma dos lugares á la derecha y obtendremos 86543,24 metros cuadrados.

Para convertir 385,00439107 kilómetros cuadrados en áreas, como que un kilómetro cuadrado tiene 10000 áreas se multiplicará por 10000 el número dado y obtendremos

3850043,9107 áreas.

Conviértase 15400391478 milímetros cuadrados en kilómetros cuadrados y dará

0,015400391478 kilómetros cuadrados.

211. MEDIDAS EFECTIVAS. No existen medidas reales ó efectivas de superficie; para valuar una superficie se miden ciertas líneas con las medidas reales de longitud.

Conocidas estas dimensiones se calcula la superficie empleando los medios que para ello nos suministra la geometría y trigonometría.

EJERCICIOS

1º. ¿Cuánto hay que pagarle á un labrador que aró 291503,14 decimetros cuadrados de terreno, á razón de $ 0,0489 el área?

2º. Se quieren sembrar dos terrenos de alfalfa: el primero compuesto de 54326,04 metros cuadrados, y el segundo de 30592,147 m.cd., y sabiendo que se necesitan 20 kg. de semilla para cada hectárea, ¿cuánta semilla será necesaria para los dos terrenos?

Medidas de volumen

212. Se ha dicho en el número **196** que las unidades principales para los volúmenes son el *metro cúbico* y el *esterio*.

El *metro cúbico* es un cubo que tiene por cada lado un metro.

El *esterio* es también un metro cúbico destinado para medir leña, (véase en los números **221** y **222**).

213. Las unidades de volúmen son cubos formados por cuadrados que tienen por lados las unidades longitudinales, y son las siguientes:

Múltiplos	*Miriámetro cúbico*	(Mm.cb.)	1000000000000
	Kilómetro cúbico	(Km.cb.)	1000000000
	Hectómetro cúbico	(Hm.cb.)	1000000
	Decámetro cúbico	(Dm.cb.)	1000

Unidad usual *Metro cúbico* (m.cb.)

Submúltiplos	*Decimetro cúbico*	(dm.cb.)	0,001
	Centimetro cúbico	(cm.cb.)	0,000001
	Milimetro cúbico	(mm.cb.)	0,000000001

214. Vemos en el cuadro precedente, que una unidad cúbica de un orden cualquiera, es 1000 veces menor que la del orden inmediato superior, es decir, que una unidad cúbica cualquiera contiene 1000 unidades del orden inmediato inferior, en efecto; supongamos que tenemos una caja cúbica cuyas caras interiores tienen un metro de lado, de modo que la caja podrá contener exactamente un metro cúbico.

Sabemos que las caras del cubo son cuadradas, así pues, las caras de la caja que nos imaginamos será cada una igual á un metro cuadrado.

Si dividimos la cara del fondo en 100 decímetros cuadrados (**205**), y sobre cada uno de ellos colocamos un decímetro cúbico, tendremos el fondo de la caja justamente ocupado por 100 decímetros cúbicos, pues cada uno de ellos coincidirá exactamente con cada uno de los decímetros cuadrados de la cara del fondo.

Pero esta capa de decímetros cúbicos no ocupará más que la décima parte de la altura de la caja, luego pues, tendré que colocar unas encima de las otras, 10 capas de decimetros cúbicos para llenar completamente la caja, por consiguiente contendrá 100×10=1000 decimetros cúbicos.

Del mismo modo probariamos que el decimetro cùbico contiene 1000 centímetros cúbicos, y

que el centímetro cúbico vale 1000 milímetros cúbicos, etc.... . Así como que el decámetro cúbico contiene 1000 metros cúbicos, el hectómetro cúbico 1000 decámetros cúbicos, etc. luego resultará también que 1 *metro cúbico*=1000 *decímetros cúbicos*=1000000 *centímetros cúbicos*=1000000000 *milímetros cúbicos.*

1 *kilómetro cúbico*=1000 *hectómetros cúbicos*= 1000000 *decámetros cúbicos*=1,000000000 *metros cúbicos.*

215. Recíprocamente, un metro cúbico es la millonésima parte de un hectómetro cúbico, ó la milésima parte de un decámetro cúbico; así como un centímetro cúbico es la millonésima parte de un metro cúbico ó la milésima parte de un decímetro cúbico.

216. Según acabamos de ver, una unidad cúbica de un orden cualquiera vale 1000 unidades del orden inmediato inferior, ó lo que es lo mismo, se necesitan 1000 unidades de un orden cualquiera para formar una del orden inmediato superior de donde resulta que todos los múltiplos se deben escribir con tres cifras, excepción del superior que puede tener una ó dos solamente, y los submúltiplos se escriben también con tres cifras cada uno.

Por ejemplo, 8 kilómetros cúbicos, 36 hectómetros cúbicos, 149 decámetros cúbicos, 7 metros cúbicos y 47 decímetros cúbicos, se escribirá

8036149007.047 metros cúbicos

Así, 140 kilómetros cúbicos, 63 decámetros cúbicos, 75 metros cúbicos, 169 centímetros cúbicos y 8 milímetros cúbicos, se escribirá

140000063075,000169008 metros cúbicos.

Recíprocamente, 8953,204 metros cúbicos equivalen á 8 decámetros cúbicos, 953 metros cúbicos y 204 decímetros cúbicos.

El número 30059764,81002 metros cúbicos, equivale á 30 hectómetros cúbicos, 59 decámetros cúbicos, 764 metros cúbicos. 810 decímetros cúbicos y 20 centímetros cúbicos.

Siempre que ocurra que el número de cifras decimales no sea múltiplo de 3 deberá completarse con uno ó dos ceros para que lo sea, como lo hicimos en el último ejemplo que hemos puesto, y como se verá en el siguiente

El número 85060492,8640173 metros cúbicos, es equivalente á 85 hectómetros cúbicos, 60 decámetros cúbicos, 492 metros cúbicos, 864 decímetros cúbicos, 17 centímetros cúbicos 300 milímetros cúbicos

217. El miriámetro, el kilómetro, el hectómetro y el decámetro cúbico se toman por unidad cunado se quier eexpresar grandes volúmenes, como el del Sol, el de la Tierra, el de una gran montaña etc.

218. Cambio de unidad.—Se procede como se ha explicado en los números **200** y **210.**

Por ejemplo, sea convertir 345001,936780000415 decámetros cúbicos, en decímetros cúbicos.

Como un decámetro cúbico tiene 1000000 decímetros cúbicos, no tendremos más nada que hacer, que correr la coma seis lugares hacia la derecha y resultará

345001936780,000415 decímetros cúbicos

El número 3645,089 metros cúbicos, reducido

á kilómetros cúbicos se trasformará en

0,000003645089 km.cb.

219. MEDIDAS EFECTIVAS.—No existen más medidas reales de volúmen que las destinadas á medir leña, de las cuales nos ocuparemos en seguida.

Para determinar el volumen de un cuerpo se toman con el decámetro, metro ó decímetro lineal, ciertas dimensiones con las cuales se deduce el volumen por medio del cálculo, según procedimientos que nos enseña la geometría.

220. OBSERVACIÓN—Para medir el volumen de una embarcación se hace uso también del metro cúbico que se llama entonces *tonelada de arqueo.*

El metro cúbico hemos dicho que tiene 1000 decímetros cúbicos, y como un decímetro cúbico de agua destilada, á 4 grados centígrados de temperatura pesa en el vació un kilógramo, el peso del agua en las mismas condiciones, contenida en un metro cúbico será de 1000 kilógramos; ó sea una tonelada métrica, luego, *la tonelada métrica es el peso del agua pura contenida en una tonelada de arqueo.*

Medidas para la leña

221. El ESTERIO es la unidad principal de las medidas para leña, es equivalente á un metro cúbico.

El esterio no tiene mas que un múltiplo, el *decasterio* equivalente á 10. esterios, y un submúl-

tiplo, el *decisterio* que representa la décima parte del esterio.

222. Medidas efectivas. Tres son las medidas reales que existen, el *esterio*, el *doble esterio* y el *quintuplo esterio*, equivalente á cinco estérios.

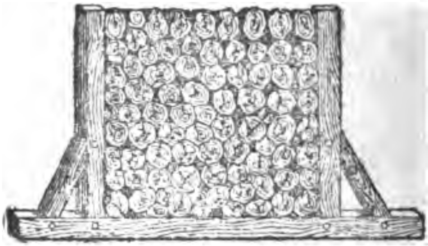


Fig. 10—Esterio

El *esterio* es un cuadro de madera sobre el cual se elevan perpendicularmente dos montantes asegurados á la *base* por dos contrafuertes.

La separación de los montantes es de un metro y la altura de ellas varía según el largo de las astillas de leña: siendo las astillas de un metro de largo, la altura de los montantes debe ser también de un metro, siendo las astillas mas largas, la altura de los montantes debe ser menor.

Las astillas se colocan en capas horizontales entre los dos montantes hasta llegar á la altura de ellos.

La leña generalmente se vende por lo que pesa, por carradas ó por el número de astillas ó rajas, así es que el esterio se usa muy poco.

EJERCICIOS

1.° ¿Qué cantidad de arena tendrá que conducir y cuántos viajes tendrá que hacer un carretillero para ganarse $ 235,46, habiéndose comprometido á cargar en cada viaje 635,047 centímetros cúbicos, y cobrando $ 1.35 por cada carrada?

2.° Un carrero ha conducido desde las canteras del Chuy, en ocho viajes 15436,721 decímetros cúbicos de piedra. ¿Cuánto ha conducido en cada viaje en el supuesto de que en cada carga llevaba igual volúmen de piedra?

¿Cuanto se le debe, habiéndose convenido que se le pagaría á razón de $ 2.235 el metro cúbico?

3.° El esterio de astillas de sauce pesa 324 kilógramos y vale $ 1.50; el de álamo blanco pesa 220 kg. y vale lo mismo que el anterior; estas maderas carbonizadas por los procedimientos ordinarios dan de carbón poco mas ó menos el tercio de su volúmen y el quinto de su peso. ¿Cuál es en metros cúbico y en kilógramos el producto del esterio de cada una de las dos maderas indicadas? ¿A que precio resultará el metro cúbico y los 100 kg. de cada clase de carbón?

Monedas

223· La unidad monetaria es el *peso*, que es una pieza redonda que contiene 917 milésimos de su peso en plata buena y el resto, ó sean 83 milésimos de cobre ó liga; su peso total es de 25,49 gramos.

Las múltiplos del peso son:

El *doble peso* que vale	2	pesos
El *medio doblón* que vale	5	»
El *doblón* que vale	10	»
El *doble doblón* que vale	20	»
El *quintuplo doblón* que vale	50	»
El décuplo doblón que vale	100	»

En la República solo en papel moneda existen los múltiplos del peso.

Los submúltiplos son:

De plata:
- El *medio peso* ó cinco reales
- El *doble décimo* ó dos reales
- El *décimo* ó un real

De cobre:
- 4 *centésimos* ó 2 vintenes
- 2 *centésimos* ó 1 vinten
- 1 *centésimo* ó ½ vinten
- 5 *milésimos* ó ¼ vinten

VALOR OFICIAL

De las monedas de oro que tienen circulación legal en la República

España	Doblón de 100 reales	$	
»	y de 10 escudos	»	4 82
»	25 pesetas (Alfonsinas)	»	4 66
Argentina	Pieza de 5 nacionales	»	4.66
Brasil	Pieza de 20000 reis	»	10.56
»	» » 10000 reis	»	5.28
»	» » 5000 reis	»	2.64

Chile	Cóndor de 10 pesos	»	8.82
»	Medio cóndor de 5 pesos	»	4.41
Colombia	Pieza de 20 pesos	»	18.66
Perú	Pieza de 20 soles	»	18.66
Venezuela	Pieza de 20 pesos	»	18.66
E. Unidos	Doble águilla de 20 dollars	»	19.32
»	Aguila de 10 »	»	9.66
»	Media Aguila de 5 »	»	4.83
Portugal	Corona, pieza de 10.000 reis	»	10.45
Iglaterra	Libra esterlina, pieza de 20 chelines	»	4.70
»	Media libra esterlina, pieza de 10 chelines	»	2.35
Alemania	Pieza de 20 marcos	»	4.60
»	» de 10 »	»	2 30
Austria	» de 8 florines	»	3.73
Francia	» de 100 francos	»	18.66
»	» de 50 »	»	9.33
»	» de 20 »	»	3.73

Bélgica, Italia y Suiza, lo mismo que Francia.

EJERCICIOS

1.° 25 doblones, 8 dobles pesos, 1 medio doblón, 3 pesos y 36 centésimos; ¿cuántos centésimos de peso forman?

2.° 63 libras esterlinas, 9 cóndores, 27 piezas de 100 francos y 14 águilas, ¿cuántos pesos moneda nacional forman?

3°. Convertir 324 libras esterlinas en francos, moneda francesa.

Medidas para la circunferencia

224. Al establecer el sistema métrico decimal

de pesas y medidas, se dividió el ***cuadrante de circunferencia*** en 100 partes iguales llamadas ***grados***, cada grado se considera dividido en 100 partes iguales llamadas ***minutos***, y cada minuto en 100 ***segundos***.

De este modo un arco cualquiera puede expresarse siempre por un número decimal de grados.

Por ejemplo: 8 grados 25 minutos, 79 segundos, puede escribirse así: 8,2579 grados.

PROBLEMA

¿Qué distancia hay entre Wáshington que se halla á los 43,2077 grados de latitud Norte y Kingston principal ciudad de la isla de Jamaica que se encuentra sobre el mismo meridiano de Washington, á los 19,9594 grados de latitud Norte?

Hemos dicho que el cuadrante de meridiano terrestre tiene 10000000 de metros, y según acabamos de ver el cuadrante de circunferencia se divide en 100 grados, el grado en 100 minutos, etc., luego facil es averiguar que cada grado de meridiano terrestre representa 100000 metros, cada minuto 1000 y cada segundo 10 metros.

De modo pues, que multiplicando por 10 la diferencia de latitud, expresada en segundos, entre los dos puntos indicados, obtendremos el número de metros que hay entre las dos ciudades citadas.

	432077	segundos
	199594	»
Diferencia	232483	segundos

Multiplicando por 10 la diferencia hallada, tendremos por último que la distancia entre Washington y Kingston es de 2324,830 kilómetros.

EJERCICIOS

1.° Hállase la distancia que hay entre la ciudad de la Colonia y la de la Asunción del Paraguay, sabiendo que la primera se halla á los 38,3047 grados de latitud Sud, la segunda á los 28,0901 grados, también de latitud Sud, y que ambas se encuentran sobre el mismo meridiano.

2.° ¿Cuántos grados, minutos y segundos centesimales componen 724009,35 kilómetros de meridiano terretre?

LECCIÓM XXIII

Sistema antiguo de pesas y medidas

225. Como lo hemos dicho en el número **194**, el único sistema de pesas y medidas autorizado por la ley es el métrico decimal: pero á pesar de esto es muy conveniente conocer también el sistema antiguo, pues hasta hace muy poco tiempo se ha usado, así pues, vamos á dedicar algunas páginas al estudio del sistema antiguo de pesas y medidas, á las equivalencias y relaciones de las unidades principales de uno y otro sistema, y al cálculo de los números *denominados* ó concretos formados con unidades del antiguo sistema.

Medida del tiempo

226. Las unidades de tiempo no han sido alteradas por el nuevo sistema, y como no siguen la ley decimal, no las incluimos en la nomenclatura del sistema métrico.

227. La unidad fundamental del tiempo es el día.

Llámase día á la duración de una rotación terrestre, es decir, al tiempo que emplea nuestro globo en girar una sola vez alrededor de su eje; por consiguiente la duración del día es igual para todas las naciones y en todes las épocas del *año*.

Llámase *año* al tiempo que emplea la Tierra en efectuar una revolución completa alrededor del Sol.

228. Durante el año la Tierra da 365 ¼ rotaciones sobre su eje, de modo pues, que el año consta de 365 ¼ días (*) pero como presentó siempre serias dificultades añadir al fin del año el cuarto de día que tiene de pico, en tiempo de Julio César y por consejo del astrónomo egipcio llamado Sosigenes se acordó que el año constase ordinaríamente de 365 días y que al fin de cada cuatro años se le añadiese un día entero, es decir, que se contase uno de 366 días para compensar exactamente el ¼ de día que se pierde cada año, de ahí viene la división de los años en *comunes* y *bisiestos*; el año común consta de 365 días y el bisiesto de 366.

Llámase *cuatrenio* al intérvalo de cuatro años, de los cuales tres son comunes y uno bisiesto.

Divisiones del tiempo

229. El *Siglo*	consta de	100	*años*
El *año*	» »	12	*meses*

(*) Aproximadamente, pues la duración del año es de 365 días 5 horas 48 minutos y 50 seguddos.

El *mes*	»	»	30 *dias*
El *dia*	»	»	24 *horas*
La *hora*	»	»	60 *minutos*
El *minuto*	»	»	60 *segundos*

El año se divide también en 52 *semanas* y un día si es común y en 52 *semanas* y 2 días si es bisiesto. (1)

El año hemos dicho que se subdivide en 12 meses los cuales tienen cada uno su nombre particular, y ellos son: *Enero, Febrero; Marzo, Abril, Mayo, Junio, Julio, Agosto, Setiembre, Octubre, Noviembre* y *Diciembre.*

Enero, Marzo, Mayo, Julio, Agosto, Octubre y *Diciembre,* tienen 31 días: Abril, Junio, Setiembre y Noviembre tienen 30 dias: y por último Febrero tiene 28 días en los años comunes y 29 en los bisiestos.

Aprendiendo de memoria los siguientes versos, muy populares por cierto, es más facil saber siempre los dias que tiene cada mes.

Treinta dias trae Noviembre,
con Abril, Junio y Setiembre;
veinte y ocho tiene uno,
y los demás treinta y uno.

La semana se considera dividida en siete días: *Lunes, martes, miercoles, jueves, viernes, sábado* y *domingo.*

(1) el año no se compone de $365\ \frac{1}{4}$ dias como supuso Julio César, pues como se ha viso en la nota precedente, solo consta de 365 dias, 5 horas, 48 minutos y 50 segundos, de donde resultan aumentados los años del calendario romano eu 11'10" los cuales producen un error de 44'40" cada cuatro años. Para comepnsar esta diferencia el Papa Gregorio XIII dispuso que se suprimiesen tres bisiestos cada 400 años, y que estos fuesen los años principio de siglo, cuyas centenas y mil.ares no fuesen divisibles por cuatro: por esta

Se llama *Década*, à un periodo de 10 años: *Lustro* à uno de 5 años: *Bienio* à uno de 2 años.

Se llama *Semestre* à un periodo de 6 meses: *Trimestre* à uno de 3 meses.

El mes comercial tiene siempre treinta dias.

Medidas para la circunferencia

230.

Cuadrante	=	90	*grados*	=90°
Grado	=	60	*minutos*	=60'
Minuto	=	69	*segundos*	=60"

Observaciones

1.° Las fracciones de segundo se aprecian en decimales: así se dice, 47"85 (cuarenta y siete segundos ochenta y cinco centésimos de segundo).

Otro ejemplo; 53°27'18,"46 se lee, 53 grados 27 minutos, 18 segundos y 46 centésimos de segundo.

2.° Como ya se ha generalizado, sobretodo en Europa, el uso de instrumentos topográficos cuyos cuadrantes están divididos en 100 *grados*, para distinguir los *grados* del cuadrante dividido en 100 partes iguales, de los del que solo está dividido en 90, se les da el nombre de *centesimales* à los primeros y de *sexagesimales* à los segundos.

---

razón fué común el año 1800. que debió haber sido bisiesto; otro tanto sucederá con el año 1900, pero el año 2000 será bisiesto.

La corrección que acabamos de iudicar es lo que se llama reforma Gregoriana, la cuál ha sido aceptada por todas las naciones cristianas à excepción de los rusos y griegos que aun se rigen por el CANDELARIO JULIANO.

La CORRECCIÓN GREGORIANA auu no iguala bien la duración del año civil con la del astronómico, pero es tan pequeña la diferencia, que solo cada 4000 años habrá que suprimir un bisiesto.

Es año bisiesto todo aquel que es divisible exactamente por 4, à excepción e los excluidos por la corrección Gregoriana.

Unidades de longitud

231.	La	*legua*	=	3	*millas*
	La	*milla*	=	20	*cuadras*
	La	*cuadra*	=	100	*varas*
	La	*vara*	=	3	*piés*
	El	*pié*	=	12	*pulgadas*
	La	*pulgada*	=	12	*líneas*
	La	*línea*	=	12	*puntos*

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Para áridos

232.	La	*fanega doble*	=	8	*cuartillas*
	La	*fanega*	=	4	*cuartillas*
	La	*cuartilla*	=	¼	*fanega*

Para líquidos

La	*pipa*	=	6	*barriles*
El	*barril*	=	32	*frascos*
La	*cuarterola*	=	48	*frascos*
El	*galón*	=	5½	*cuartas*
El	*frasco*	=	4	*cuartas*
La	*cuarta*	=	2	*octavas*
La	*octava*	=	½	*cuarta*

Medidas de peso

233.	La	*tonelada*	=	20	*quintales*	(qq.)
	El	*quintal*	=	4	*arrobas*	(@)
	La	*arroba*	=	25	*libras*	(lb.)

La *libra*	=	16	*onzas*	(onz.)
La *onza*	=	16	*adarmes*	
El *adarme*	=	16	*gramos*	
Pesada de cueros salados	=	75	*libras*	
Pesada de cueros secos	=	40	*libras*	

Medidas para medicamentos

La *libra*	=	12	*onzas*
La *onza*	=	8	*dracmas*
La *dracma*	=	3	*escrúpulos*
El *escrúpulo*	=	24	*granos*

Medidas superficiales

234.	*Legua cuadrada*	=	3600	*cuadras*	*cds.*
	Suerte de estancia	=	2700	»	»
	Cuadra cuadrada	=	10000	*varas*	»
	Vara cuadrada	=	9	*piès*	»
	Piè cuadrado	=	144	*pulgadas*	»
	Pulgada cuadrada	=	144	*lineas*	»
	Linea cuadrada	=	144	*puntos*	»

Medidas de volumen

235.	*Vara cúbica*	=	27	*piès cúbicos*
	Piè cúbico	=	1728	*pulgadas cúbicas*
	Pulgada cúbica	=	1728	*lineas cúbicas*
	Linea cúbica	=	1728	*puntos cúbicos*

Medidas para leña

Una carrada	=	100	*manos*
Una mano	=	4	*astillas*

EJERCICIOS

1.º Cual es el precio de 23 libras de arroz, costando 8,35 pesos el quintal?

2.º La radiación de la luz es rectilínea, y la velocidad de sus rayos es de 60000 leguas por segundo; la velocidad del sonido es tèrmino medio de 397 varas por segundo; con estos datos, calcúlese á que distancia de nosotros se ha hecho un disparo de cañón, cuyo fogonazo fuè visto á las 9 horas de la noche y el estampido solo fuè oído 8 segundos despuès.

3.º La cuarterola de vino nacional cuesta $ 25.27; cuanto cuestan 3,72 cuartas del mismo vino?

LECCIÒN XXIV

Equivalencias de las medidas antiguas con las modernas

Medidas de longitud

237.	*Legua*	=	5154,000000	*metros*
	Cuadra	=	85,900000	»
	Vara	=	0,859000	»
	Piè	=	0,286333	»
	Pulgada	=	0,023861	»
	Linea	=	0,001988	»
	Punto	=	0,000166	»

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Para áridos

238.	*Fanega doble*	=	274,544	*litros*
	Fanega sencilla	=	137,272	»
	Cuartilla	=	34,318	»
	Media cuartilla	=	17,159	»

Para líquidos

Pipa	=	455,4240	*litros*
Cuarterola	=	113,8560	»
Barril	=	75,9040	»
Frasco	=	2,3720	»
Cuarta	=	0,5930	»
Octava	=	0,2965	»

Medidas de peso

239.	*Tonelada*	=	918,8000000	*kg.*
	Quintal	=	45,7400000	»
	Arroba	=	11,4850000	»
	Libra	=	0,4594000	»
	Onza	=	0,0287125	»
	Adarme	=	0,0017945	»
	Grano	=	0,0000498	»
	Pesada de cueros alados	=	34,455	»
	Pesada de cueros secos	=	18,376	»

Medidas para medicamentos

Libra	=	0,3445500	*kilógramos*
Onza	=	0,0287125	»

Dracma	=	0,0035891	»
Escrúpulo	=	0,0011963	»
Grano	=	0.00004985	»

Medidas superficiales

240.	*Legua cuadrada*	=	26563716,000000	*m.*	*cd.*
	Suerte de estancia	=	19922787,000000	»	»
	Cuadra cuadrada	=	7378,810000	»	»
	Vara cuadrada	=	0,737881	»	»
	Pié cuadrado	=	0,081987	»	»
	Pulgada cuadrada	=	0,000569	»	»
	Linea cuadrada	=	0,000004	»	»

Medidas de volumen

241.	*Vara cúbica*	=	0,633839779	*m.*	*cb.*
	Pié cúbico	=	0,023475547	»	»
	Pulgada cúbica	=	0,000013585	»	»
	Linea cúbica	=	0,000000008	»	»

Medidas para leña

242.	*Una carrada*	=	0,666667	*esterio*
	Una mano	=	0,006667	»

EQIVALENCIAS

DE LAS

Unidades del sistema métrico, con las del antiguo sistema

Medidas de longitud

243.	*Miriámetro*	=	11641,443539	*varas*
	Kilómetro	=	1164,144354	»

Hectómetro	=	116,414435	»
Decámetro	=	11,641444	»
Metro	=	1,164144	»
Decímetro	=	0,116414	»
Centímetro	=	0,011641	»
Milímetro	=	0,001164	»

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Para áridos

244.	*Hectólitro*	=	0,7284	*fanega*
	Decálitro	=	0,0728	»
	Litro	=	0,0073	»

Para líquidos

Kilólitro	=	421.5850	*frascos*
Hectólitro	=	42,1585	»
Decálitro	=	4,2159	»
Litro	=	0,4216	»
Decílitro	=	0,0421	»
Centilitro	=	0,0042	»

Medidas de peso

245.	*Tonelada métrica*	=	87,0700	*arrobas*
	Quintal métrico	=	8,7070	»
	Miriágramo	=	0,8707	»
	Kilógramo	=	0,0871	»
	Kilógramo	=	2,1768	*libras*
	Hectógramo	=	0,2177	»
	Decágramo	—	0,0217	»

Gramo	=	0,0022	»
Gramo	=	0,0348	*onza*
Decigramo	=	0,0035	»
Centigramo	=	0.0004	»
Miligramo	=	0,00004	»

Medidas para medicamentos

246.

Kilógramo	=	2,9023	*libras*
Hectógramo	=	0,2902	»
Decágramo	=	0,0290	»
Gramo	=	0,0029	»
Gramo	=	0,0348	*onza*
Decigramo	=	0,0035	»
Centigramo	=	0,0004	»
Miligramo	=	0,00004	»

Medidas superficiales

247.

Miriámetro cuadrado	=	3,764531	*leguas*	*cds.*
Kilómetro cuadrado	=	0,037645	»	»
Hectómetro cuadrado	=	0.000376	»	»
Decámetro cuadrado	=	135,523218	*vars.*	*cd.*
Metro cuadrado	=	1,355231	»	»
Decimetro cuadrado	=	0,013552	»	»
Centimetro cuadrado	=	0,000135	»	»
Milimetro cuadrado	=	0,0000014	«	»

Medidas de volumen

248.

Kilómetro cúbico	=	1577685770,741036	*v.*	*cb.*
Hectómetro cúbico	=	1577685,770741	»	»
Decámetro cúbico	=	1577,685771	»	»
Metro cúbico	=	1,577685	»	»

Decimetro cúbico	=	0,001578	»	»
Centimetro cúbico	=	0,000002	»	»
Milimetro cúbico	=	0,000000002	»	»

Medidas para leña

249.	*Decasterio*	=	15.00	*carradas*
	Esterio	=	1,50	»
	Decisterio	=	60.00	*astillas*

PROBLEMAS

1º. De Melo á cierto punto del río Yaguarón hay 18 leguas, 27 cuadras, 53 varas, 2 piés 9 líneas, á cuántos metros es equivalente esta distancia?

18 leguas son iguales	á	5154^m×18=	92772,00 m.
27 cuadras equivalen	»	85,9^m×27=	2319,30 »
53 varas »	»	0,859×53=	19,757 »
2 piés »	»	0,286×2 =	0,573 »
9 líneas »	»	0,002×9 =	0,018 »
		Suma	95111,648 m.

Resulta que la expresada distancia es equivalente á 95111,648 metros.

2º. ¿Cuánto importan 128 fanegas de trigo á razón de $ 3,60 el hectólitro?

128 fanegas equivalen á 137,272 litros×128= 17570,816 litros=175,70816 hectólitros.

```
 175,70816
       3.6
 ---------
 105424896
 52712448
 ---------
 632,549376
```

Resultado que importan 632 $ con 549376 millonésimos de peso.

3°. Se han vendido 8 toneladas y 14 arrobas de azúcar á $ 2.10 el miriágramo, ¿cuánto importa la venta?

8 toneladas equivalen á 918,8 kg.×8=7350,4 kg.
14 @ equivalen » 11,485 kg.×14=160,79 »

Suma 7511,19 kg.

ó sean 751,119 miriágramos á
$ 2,1

751119
1502238

1577,3499

El azúcar vendido importa $ 1577 y 3499 diezmilésimos de peso.

4°. ¿Cuántas pipas componen 57 kilólitros de aguardiente y 49 decálitros del mismo líquido?

57 kilólitros equivalen á 421,585 frascos×57=
24030,345 frascos
49 decálitros equivalen á 4,2159 frascos×49=
206,5791 frascos

24236,9241 frascos

ahora no hay más que reducir el número de frascos hallados á pipas, lo cual es fácil, recordando que la pipa tiene 192 frascos, luego.

24236,9241	192
503	126,2339
1196	
449	
652	
764	
1881	
153	

De modo que los 57 kilólitros y 49 decálitros de aguardiente equivalen á 126,2339 pipas.

5°. ¿Cuántas hectáreas componen 17 suertes de estancia, 2136 cuadras cuadradas y 497 varas cuadradas?

17 suertes de estancia	=1992,2787 hectáreas×17	
	=33868,7378	hectáreas
2136 cuadras cuads.	= 1576,1138	»
497 varas cuadradas	= 0,0367	»
	35444,8883	hectáreas

Dicho terreno se compone de 35444 hectáreas, 88 áreas y 83 centiareas.

EJERCICIOS

1°. 189 kilómetros, 25 decámetros y 36 metros, ¿cuántas leguas componen?

2°. ¿Cuánto importan 245 pipas, 6 cuarterolas y 12 frascos de vino que cuesta $ 2,35 el decálitro?

3°. Para fabricar el jabón veteado seemplea en cada kilógramo; 6 Dg. de soda, 6 Hg., 2 de materias grasas y 320 g. de agua; ¿Cuántas libras

de cada materia se necesitan para fabricar 2 @ de jabón?

4°. En la confección de 100 tazas de café, emplea un fondero, 100 Dg. de café á $ 0,60 el Kg: 5 Kg de azúcar á $ 0,25 el Kg: 2 litros de aguardiente á $ 0,35 el litro. ¿Cuánto gana vendiendo la taza á $ 0,06?

5°. Los vinos averiados se consigue componerlos mezclando por hectolitro de vino 20 gramos de ácido tartárico que vale $ 1.50 el Kg: ¿qué gasto se hará para arreglar una pipa?

LECCIÒN XXV

Sistema de medidas antiguas del Brasil

Medidas de longitud

250	*Legua* (*50 cuadras*)	=	3 *millas*
	Milla	=	1000 *brazas*
	Cuadra	=	60 »
	Braza	=	2 *varas*
	Covado (*poco usado*) *tiene* *3 palmos y*		$\frac{3}{4}$ *pulgada*
	Pié	=	12 *pulgadas*
	Palmo	=	8 »
	Pulgada	=	12 *líneas*
	Línea	=	12 *puntos*

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Para áridos

251.	*Alqueire*	=	4	*cuartos*
	Cuarto	=	2	*medios cuartos*

Para líquidos

Tonel	=	2	*pipas*
Pipa	=	180	*canadas*
Almude	=	12	»
Canada	=	4	*cuartillos*

Medidas de peso

252.	*Tonelada*	=	54	*arrobas*
	Quintal	=	4	»
	Arroba	=	32	*libras*
	Libra	=	16	*onzas*
	Onza	=	8	*octavas*
	Octava	=	72	*granos*

Medidas superficiales

253.	*Cuadra cuadrada*	=	3600	*brazas*	*cuadrs.*
	Braza cuadrada	=	4	*varas*	»
	Vara cuadrada	=	25	*palmos*	»
	Piè cuadrado	=	144	*pulgadas*	»
	Palmo cuadrado	=	64	»	»
	Pulgada cuadrada	=	144	*lineas*	»

Medidas agrarias

254.	*Sesmaria de campo* (1)	=	3	*leguas cuadrs.*	
(2)	» *de monte*	=	2250000	*brazas*	*cds.*
	Legua cuadrada	=	9000000	»	»
	Milla cuadrada	=	1000000	»	»
(3)	*Cuadra de sesmaria*	=	180000	»	»
	Brasa de sesmaria	=	3000	»	»
	Palmo de sesmaria	=	300	»	»

EQUIVALENCIAS

Medidas antiguas del Brasil, con las del sistema métrico decimal y víceversa

Medidas de longitud

255.	*Legua*	6600,00	*metros*
	Milla	2200,00	»
	Cuadra	132,00	»
	Braza	2,20	»
	Vara	1,10	»
	Covado	0,68	»
	Piè	0,33	»

(1) Una sesmaria de campo es uu rectángulo que tiene 3 leguas de base por una de altura.

(2) Una sesmaria de monte es un cuadrado que tiene media legua de lado; ó bien un rectángulo de una legua de base por $\frac{1}{4}$ de altura, es decir, que es la cuarta parte de una legua cuadrada y sirve para medir los bosques; es poco usada.

(3) Una cuadra, una braza ó un palmo de sesmaria, son respectivamente rectángulos que tienen una legua de base por una cuadra, una braza ó un palmo de altura.

Palmo	0,22	»
Pulgada	0,075	»
Linea	0,00229	»
Punto	0,00019	»

Miriàmetro	1,51	*legua*
Kilómetro	7,57	*cuadras*
Hectómetro	45,45	*brazas*
Decámetro	9,09	*varas*
Metro	0,91	»
Decìmetro	5,46	*pulgadas*
Centìmetro	6,53	*lìneas*
Milimetro	7,84	*puntos*

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Para áridos

256.

Alqueire	36,27	*litros*
Cuarto	9,07	»
Medio cuarto	4,53	»

Para líquidos

Tonel	960	*litros*
Pipa	480	»
Almude	31,94	»
Canada	2,66	»
Cuartillo	0,66	»

Aridos

Hectólitro	2,75	*alqueirés*

Decàlitro	1,10	*cuartas*
Litro	0,11	»

Líquidos

Hectòlitro	37,59	*canadas*
Decálitro	3,76	»
Litro	1,50	*cuartillos*
Decilitro	0,15	»
Centilitro	0,015	»
Mililitro	0,0015	»

Medidas de peso

257.	*Tonelada*	=	793,238	*kilógramos*
	Quintal	=	58,758	»
	Arroba	=	14,689	»
	Libra	=	459,05	*gramos*
	Onza	=	28,69	»
	Octava	=	3,59	»
	Grano	=	0,05	»

Tonelada mètrica	68,09	*arrobas*
Quintal mètrico	6,80	»
Kilógramo	2,17	*libras*
Hectógramo	3,48	*onzas*
Decágramo	2,78	*octava* .
Gramo	26,76	*granos*
Decigramo	2,07	»
Centigramo	0,21	»
Miligramo	0,02	»

Medidas superficiales

258.	*Cuadra cuadrada*	=	17424,0000	*m. cd.*
	Braza cuadrada	=	4,8400	» »

Vara cuadrada	=	1,2100	»	»
Piè cuadrado	=	0,1089	»	»
Palmo cuadrado	=	0,0484	»	»
Pulgada cuadrada	=	0,000756	»	»

Hectómetro cuadrado	=	2066,11	*brazas*	*cd.*
Decámetro cuadrado	=	82,64	»	»
Metro cuadrado	=	20,66	»	»
Decimetro cuadrado	=	29,76	*pulgds.*	»
Centimetro cuadrado	=	42,74	*lineas*	»
Milimetro cuadrado	=	61,92	*puntos*	»

Medidas agrarias

259.	*Sesmaria de campo*	=	130680000,00	*m.*	*cd.*
	» *de monte*	=	10890000,00	»	»
	Legua cuadrada	=	43560000,00	»	»
	Milla cuadrada	=	4840000,00	»	»
	Cuadra de sesmaria	=	871200,00	»	»
	Braza de sesmaria	=	14520,00	»	»
	Palmo de sesmaria	=	1452,00	»	»

Miriámetro cuadrado	=	2,30	*leguas cds.*	
Kilómetro cuadrado	=	206611,57	*brazas*	»
Hectárea	=	2066,11	»	»
Area	=	20,66	»	»
Centiárea	=	0,21	»	»

Unidades monetarias

260. Existen en el Brasil cuatro clases de monedas. Las de oro, las de plata, las de nickel y las de cobre.

La pieza de plata de 2000 reis, es una moneda que pesa 25,500 gramos, contiene 917 milésimas

de su peso en plata buena y el resto hasta 1000 milèsimos, de liga; el diámetro es de 0,037 metros, de modo pues, que solo se diferencia de la unidad monetaria de nuestro sistema en los 2 centigramos que tiene más de peso.

Monedas brasileras

Oro	Pieza	de	20000	reis	
	»	»	10000	»	
	»	»	5000	»	(1)
Plata	»	»	2000	»	
	»	»	1000	»	
	»	»	500	»	
Nickel	»	»	200	»	
	»	»	100	»	
	»	»	50	»	
Cobre	»	»	40	»	
	»	»	20	»	
	»	»	10	»	

PROBLEMAS

1º. Se desea saber cuantas brazas de alambre se emplearán (sin contar con el que se necesita para las ataduras etc.) para construir un cerco de 6 hilos de dicho material, sobre las divisas de un campo que está limitado por el Norte, por una linea recta de 1 legua y 25 cuadras, por el Este, por otra de 49 cuadras y 36 brazas, por el Sud,

(1) Esta moneda está desmonetizada por no mencionarla el decreto número 6143 de 10 de Marzo de 1876,

por otra de una legua y 3 varas y por el Oeste, por otra línea recta de 2 millas y 1 vara.

Empezaremos por reducir la longitud de cada línea divisoria á brazas y obtendremos:

1 leg. 25 cuads.=75 cuads.=75×60 brazas=
4500 brazas
49 cds. 36 brazas=49×60+36 brazas=2976 brazas
50 cds. 3 varas=3000 brazas 3 varas=3001 » 1 v.
2 millas 1 vara =2000 » 1 »

Suma =12478 brazas
Ahora multiplicado por 6

obtendremos 74868 brazas

Resultado; se necesita 74868 brazas de alambre.

2°. ¿Cuánto importan 3 toneles de aguardiente á razón de 400 reis el cuartillo?

Un tonel tiene 2 pipas, luego 3 toneles equivalen á 6 pipas. Cada pipa tiene 180 canadas, las 6 pipas componen 1080 canadas y como cada una de ellas se compone de 4 cuartillos, las 1080 formarán 4320 cuartillos que á razón de 400 reis cada cuartillo, importarán

4320
400
1728000 reis

Es decir que, los 3 toneles de aguardiente importán 1728 $ 000.

3°. ¿Cuánto importa una extensión de terreno compuesta de una sesmaria de campo, 2 leguas cuadradas y 8 cuadras de sesmaria que se compró á razón de 10$500 la hectárea?

Una sesmaria de campo	=	13068,0000	hectáreas
» legua cuadrada	=	4356,0000	»
» » »	=	4356,0000	»
» cuadra de sesmaria=			»
á 87,1200; y las 8 forman	=	696,9600	»
Suma		22476,9600	hectáreas
á razón de		10$500	la hectárea
		11238480	
		2247696	
Importan		236008$0800000	

EJERCICIOS

1°. ¿Cuánto importan 8 alqueires de trigo á razón de 280 reis el medio cuarto?

2°. 17 toneladas, 9 quintales, 2 arrobas, 6 libras, ¿cuántos kilógramos componen?

3°. 45 Miriámetros, 8 kilómetros y 7 decámetros, ¿cuantas brazas componen?

4°. Una sesmaria de campo, 2 leguas cuadradas y 5 palmos de sesmaria, ¿cuántas suertes de estancia, cuadras y varas cuadradas de este país componen?

5°. Una suerte de estancia, ¿cuántas brazas de sesmaria contiene?

6°. 27 leguas brasileras, ¿cuántas leguas de este país componen?

7°. ¿Cuánto importan 12 toneladas métricas, 6 quintales métricos y 38 kilógramos de un artículo que se compró á 217 reis la onza?

8°. ¿Cuánto importa un campo compuesto de 4356,3498 hectáreas, que se compró en el Brasil á razón de 8$000 la braza de sesmaria?

9°. Una empresa de gas recibió 4987,67 metros de caños, que le cuestan 2476$875, además tiene 250$000 de gastos de flete, derechos de aduana, etc., ¿á qué precio sale el pié de dicho caño?

LLECCIÓN XXVI

Medídas antiguas de la República Argentina comparadas con las del sistema mètrico decimal

Medidas de longitud

261.	*Legua (40 cuadras)*	=	*5196,000*	*metros*
	Cuadra (de 150 varas)	=	*129.900*	»
	Vara (3 piès)	—	*0,866*	»
	Piè (12 pulgadas)	=	*0,28867*	»
	Pulgada (12 lineas)	=	*0,024055*	»
	Linea	=	*0.002005*	»

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Aridos

262.	*Fanega*	=	*137,1977*	*litros*

Líquidos

Pipa (6 barriles)	=	*456,0265*	»
Barril de medida	=	*76,0044*	»
Frasco	=	*2,3751*	»

Medidas de peso

263.	*Tonelada de arqueo*	=	*918,800*	*Kg.*
	Quintal	=	*45,940*	»
	Arroba	=	*11,485*	»
	Libra	=	*0,4594*	»
	Marco (½ libra)	=	*229,7000*	*grms.*
	Onza	=	*28,7125*	»
	Adarme	=	*1,79453*	»
	Grano	=	*0,049848*	»

Medidas superficiales

264.	*Legua cuadrada*	=	*26998416,00*	*m. cd.*
	Cuadra cuadrada	=	*16874,01*	» »
	Vara cuadrada	=	*0,749956*	» »
	Pié cuadrado	=	*0,083328*	» »
	Pulgada cuadr.	=	*0,0005787*	» »

Medidas de volumen

265.	*Vara cúbica*	=	*0,649461896*	*m. cb.*
	Pié cúbico	=	*0,024054144*	» »
	Pulgada cúbica	=	*0,0000139202*	» »

Unidades monetarias

266. La unidad monetaria de la República es el peso de oro ó de plata.

El peso de oro es 1,6129 de gramo de oro, de título de 900 milésimos de fino.

El peso de plata es 25 gramos de plata, de título de 900 milésimos de fino y 100 milésimos de cobre, tiene 37 milímetros de diámetro.

267. Los múltiplos y submúltiplos del pes
son los siguientes.

Monedas de oro

Argentino	=	*5.00 pesos*
½ Argentino	=	*2.50 »*

Monedas de plata

Unidad monetaria	*1.00 peso*
Pieza de	*0.50 »*
Pieza de	*0.20 »*
» »	*0.10 »*
» »	*0.05 »*

Monedas de cobre

Pieza de	*0.02 peso*
» »	*0.01 »*

Sistema de pesas y medidas de Inglaterra

Medidas de longitud

268.	Mile (*milla*)	8	furlongs
	Furlong	40	poles
	Pole ó la perch	2½	fathoms
	Fathoms (*braza*)	2	yards
	Yard (*yarda*)	3	foots
	Foot (*pié*)	12	inch
	Inch (*pulgada*)	0,0254	metros

Medidas de capacidad

269.	Chaldron	12	sacks
	Load	5	quarters

Quarter (*cuarto*)	8	bushels
Sack (*saco*)	3	bushels
Bushel	4	pecks
Peck	2	gallons
Gallon (*galón*)	2	2 pottles
Pottle (*azumbre*)	2	quarts
Quart (*cuartillo*)	2	pints
Pints	0,568	litros

Mediddas de peso (*avoir du pois*)

270.	Ton (*tonelada*)	20	hundredweights
	Hundredweight (*quintal*)	4	quarters
	Quarter (*cuarto*)	2	stones
	Stone	14	pounds
	Pound (*libra*)	16	ounces
	Ounce (*onza*)	16	drams
	Dram (*adarme*)	1,772	gramos

PESOS DE TROY

Para las materias preciosas y medicamentos

271.	Pound (*libra*)	12	ounces
	Ounce (*onza*)	20	pennyweights
	Pennyweight	24	grains
	Grain (*grano*)	0,065	gramos

Medidas superficiales

272.	Acre	4	roods
	Rood	1210	yards squares

Rod (*perch square*)	30,25	»	»
Yard square (*yarda cuadr.*)	0,8365	m.	cd.

UNIDADES MONETARIAS

Monedes de oro

273.

La guinea	21 chelines
La media guinea	10 chelines y 6 pence
El tercio de guinea	7 chelines
El cuarto de guinea	5 chelines 3 pence
(*) El soberano (*souve reing*)	20 chelines
El medio soberano	10 chelines

Monedas de plata

La corona (*crown*)	5	chelines
La média corona	2	chelines 6 pence
El chelín (*schilling*)	12	pence (penique)
El medio chelín	6	peniques

Monedas de cobre

El penique doble, el penique sencillo, el medio penique y el cuarto penique ó farthig.

(*) Esta moneda generalmente es conocida eon el nombre de LIBRA ESTERLINA.

MEDIDAS INGLESAS

Comparadas con las del sistema métrico decimal

Medidas de longitud

274.	Mile (*milla*)	1609,315	metros
	Furlong	201.164	»
	Pole ó la perch	5,029	»
	Fathom (*braza*)	1,829	»
	Yard (*yarda*)	0,914	»
	Foot (*pié*)	0,301	»
	Inch (*pulgada*)	0,025	»

Kilómetro	1093,63	yardas
Hectómetro	109,36	»
Decámetro	10,94	»
Metro	1,09	»
Decímetro	3,94	pulgadas
Centímetro	0,39	»
Milímetro	0,04	»

Medidas de capacidad

275.	Chaldron	1308,48	litros
	Load	1453,90	»
	Quarter	290,78	»
	Sack (*saco*)	109,04	»
	Bushel	36,35	»
	Peck	9,09	»
	Gallon	4,54	»
	Pottle	2,27	»

Quart	1,14	»
Pint	0,57	»

Hectólitro	22,01	gallons
Decálitro	2,20	»
Litro	0,22	»
Decilitro	0,18	pint
Centilitro	0.02	»

Medidas de peso (avoir du pois)

276.

Ton (*tonelada*)	1016,000	kg.
Hundredweight (*quintal*)	50,802	»
Quarter (*cuarto*)	12,698	»
Stone	6,349	»
Pound (*libra*)	453,593	g.
Ounce (*onza*)	28,349	»
Dram (*adorme*)	1,772	»

Kilógramo	2,205	libras
Hectógramo	0,221	»
Decágramo	0,022	»
Gramo	0,564	dram
Decígramo	0,056	»

Pesos de troy

277.

Pound (*libra*)	373,242	gramos
Ounce (*onza*)	31,103	»
Pennyweight	1,555	»
Grain (*grano*)	0,065	»

Kilógramo	2,679	libra
Hectógramo	0,268	»
Decágramo	0,027	»
Gramo	15,432	granos
Decígramo	1,543	»
Centígramo	0,154	»
Milígramo	0,015	»

Medidas superficiales

278.

Acre	4046,72	m.	cd.
Rood	1011,68	»	»
Rod (perch ²)	25,29	»	»
Yard square (yarda ²)	0,8361	»	»

Hectárea	2,4711	acres	
Area	0,0247	»	
Area	119,6033	yardas	cd.
Centiárea	1,1960	»	»
Decímetro cuadrado	0,0120	»	»

PROBLEMAS

1°. Conviértase 6 millas, 5 furlongs, 7 fathoms, 1 foot (*pié*) y 8 inchs (*pulgadas*) en metros.

6 millas=1609,315m ×6 =9655,890 m.
5 furlongs=201,164m.×5=1005 820 m.
7 fathoms=1,829m.×7 = 12,803 m.
1 foot = 0,301 m
8 inchs=0,025m.×8 = 0,200 m.

Suma 10675,014 m.

Resulta que 6 millas, 5 furlongs, 7 fathoms, 1 pié y 8 pulgadas inglesas son equivalentes á 10675,014 metros

2°. Conviértase 4 chaldrons, 9 sacks (sacos), 2 bushels y 1 gallon, en litros.

4 chaldros	=1308,48 l.	×4=	5233,92	litros
9 sacks	=109,04 l.	×9=	981,36	»
2 bushels	= 36,35 l.	×2=	72,70	»
1 gallon		=	4,54	»
		Suma	6292,52	litros

Tenemos pues, que 4 chaldrons, 9 sacks, 2 bushels y 1 gallon, equivalen á 6292,52 litros.

3°. Se compraron en Londres 2 quarters (*cuartos de quintal*), 8 pounds (*libras*), 6 ounces (*onzas*), y 5 drams (*adarmes*), de té bueno que costó 6 soberanos el quarter. ¿Cuánto importa toda la compra? ¿A cuánto sale el kilógramo?

Primeramente reduciremos los 2 quarters, 8 pounds, 6 ounces y 5 drams á esta última especie, para lo cual, como cada quarter tiene 28 pounds, los 2 quarters representarán 56 y más 8 que tenemos formarán 64 pounds.

Cada pound tiene 16 ounces, los 64 pounds representan 1024 ounces y más 6 que tenemos forman 1030 ounces.

Cada ounce tiene 16 drams, las 1030 representarán 16480 drams y más 5 que tenemos forman 16485 drams.

Luego, pues, 2 quarters, 8 pounds, 6 ounces y 5 drams, equivalen á 16485 drams.

Del mismo modo veríamos también que un quarter equivale á 7168 drams.

Ahora diremos, si 7168 drams cuestan 6 sobe-

ranos, 16485 drams costarán tantas veces 6 soberanos, cuantas veces el número 7168 esté contenido en el número 16485, de modo que multiplicando por 6 el cociente que resulte de dividir dichos números, obtendremos el valor que nos proponemos hallar. Así:

16485	7168
21490	2.2998
71540	×6
70280	13,7988 soberanos
57680	
346	

Para valuar la fracción 7988 diezmilésimos de soberano, procèdese según la regla que se da en el número **282**; de este modo:

```
 0,7988
   ×20
 15,9760   chelines
   ×12
   1952
   976
 11,7120   peniques
```

Luego, el te comprado cuesta 13 soberanos, 15 chelines y 11.71 peniques.

Para hallar el valar del kilógramo de este te, observaremos que, equivaliendo cada dram á 1,772 gramos, los 16485 drams de te comprados equivaldrán á 16485×1,772=29211,42 gramos, ó sea á 29,2114 kilógramos, y raciocinando lo mismo que en el primer caso, diremos: si 29,2114 kg. de te cues-

tan 13,7988 soberanos, un kg. costará 29,2114 veces menos, luego, dividiendo 13,7988 por 29,2114 obtendremos el valor pedido. Así:

13,79880	29.2114
2114240	0,47237 soberanos
694420	
1101920	
2255780	
210982	

Por último, valuando la fracción 47237 cienmilésimos de soberano, según hemos hecho antes, obtendremos finalmente

0,47237	
20	
9,44740	chelines
12	
8948	
4474	
5,36880	peniques

Resulta pues, que el kilógramo de te cuesta 9 chelines y 5,37 peniques.

4°. Redúzcanse 29 hectáreas, 51 áreas, 52 centiáreas y 40 decímetros cuadrados, á medidas superficiales inglesas.

29 hectáreas	equivalen	á	70,66190000	*acres*
51 areas	»	»	1,26026100	»
52 centiáreas	»	»	0,01284972	»
40 dm. cd.	»	»	0,00010884	»
		Suma	71,93511956	acres

Para valuar el número decimal 93511956 cienmillonésimos de acre, procederemos como en el problema anterior.

0,93511956	acres
×4	
3,74047824	roods
×1210	
74047824	
148095648	
74047824	
895,97867040	yardas ²

Así pues; 29h5152,40 centiáreas equivalen á 71 acres, 3 roods 895,9787 yardas cuadradas.

EJERCICIOS

1°. En el supuesto de que el acre de terreno cueste 5 soberanos 9 chelines, ¿á qué precio resulta la hectárea en moneda nacional?

2°. Se ha vendido á una casa inglesa una partida de trigo compuesta de 12317 hectólitros á un soberano la fanega puesta en Lóndres, ¿á qué precio moneda inglesa, sale el sack *(saco)*?

3°. Conviértense 8 toneladas, 12 quintales, 3 quarters y 9 drams, en kilógramos.

4°. Conviértense 3,8049 kilógramos en pesos de troy.

5°. ¿Cuántos peniques representan 27 guineas, 8 1/2 soberanos y 9 chelines?

6°. Una pipa de vino de 455,4240 litros cuesta en Inglaterra $ 75. Se quiere conocer el pre-

cio del galón, medida inglesa, y el precio del casco, en soberanos, chelines, etc.

7°. Convertir 245 millas, 6 furlongs, 25 poles, 2 foots y 6 inchs, en metros.

8°. Convertir 17896 pesos, 859 milésimos en libras esterlinas, chelines y peniques.

NOTA—Los cuatro problemas precedentes que acaban de resolverse, así como los ocho ejercicios últimos que se proponen para resolver, se comprenderán mejor y se resolverán con toda exactitud, después de bien estudiadas las cinco lecciones siguientes que tratan de las operaciones con los números denominados.

LECCIÓN XXVII

Cálculo de los Números denominados

Reducción de un número imcomplejo á unidades de especie inferior

279. *Sea reducir á unidades inferiores el número 3 leguas.*

Sábese que una legua tiene 60 cuadras, luego 3 leguas tendrán 3 veces más, así pues, para reducir á cuadras el número dado bastará multiplicarlo por 60 y el producto 180 representará el número de cuadras equivalentes á 3 leguas; del mismo modo veremos que

3 leguas=180 cuadras=180×100 varas=18000 varas=18000×3 piés=54000 piés...........

Luego, *para reducir un número incomplejo á otro de especie inferior, se multiplica el número de unidades inferiores que contiene la unidad del imcomplejo propuesto, por este considerado como abstrato.*

280. Sea reducir el quebrado $\frac{6}{13}$ de años á unidades inferiores.

6		13
×12 meses		5 meses, 16 dias, 3 horas 41'32,"307
72 meses		(Número que se busca
7 »		
×30 días		
210 días		
80 »		
2 »		
×24 horas		
48 horas		
9 »		
×60 minutos		
540 minutos		
20 »		
7 minutos		
×60 segundos		
420 segundos		
30 »		
40		
100		
9		

Del procedimiento empleado en este caso, que pueda aplicarse á otro cualquiera, se deduce la siguiente regla:

Para reducir á complejo un quebrado propio de especie superior, se multiplica el numerador por el número que expresa las unidades inferiores inmediatas que contiene la unidad superior á que se refiere el quebrado, este producto se divide por el denominador y el cociente entero que resulte expresará el número de unidades de especie superior que contiene el quebrado: si resulta algún residuo, se multiplica por el número de veces que la unidad á que se refiere contiene á la de especie inferior inmediata; el producto se divide por el mismo denominador, y el cociente entero que resulte expresará el número de unidades de segunda especie que contiene el quebrado: y así se continúa hasta llegar á la última especie, si no se obtiene antes cociente exacto.

281. Redúzcase el quebrado impropio $\frac{23}{7}$ de legua á unidades inferiores.

En $\frac{23}{7}$ de legua desde luego vemos que hay 3 leguas y sobran $\frac{2}{7}$ de legua, así pues, después de sacados los enteros queda la cuestión reducida al caso anterior, luego tendremos

23	7
2	3 leguas, 17 cds., 14 vars., 10 puls., 3 líns., $5\frac{1}{7}$ puntos
×60 cuadras	Número que se busca
120 cuadras	
50 »	
1 »	
×100 varas	
100 varas	
30 »	
2 »	
×3 piés	
6 piés	
×12 pulgadas	
72 pulgadas	
2 »	
×12 líneas	
24 líneas	
3 »	
×12 puntos	
36 puntos	
1 »	

282. — Sea reducir el quebrado decimal 0,37 de quintal á unidades de especie inferior.

Como que el quintal tiene 4 arrobas, para saber las arrobas que contiene el decimal propuesto bastará multiplicarlo por 4; así, 0,37×4=1,48=1 @ y 0,48 de @. Para averiguar las libras que contiene el último decimal hallado, no hay más que multiplicarlo por 25 que es el número de libras que contiene la arroba, luego tendremos 0,48×25= 12,00, es decir, á 12 libras justas, así pues, resulta

que el decimal propuesto 0,37 de quintal, es equivalente á 1 arroba y 12 libras.

Del procedimiento seguido en este ejemplo, se deduce la siguiente:

Regla. — *Para reducir un número decimal incomplejo á unidades inferiores, se multiplica por el número de veces que la unidad á que se refiere contiene la inmediata inferior, haciéndose igual operación con los decimales que vayan resultando, hasta que desaparezca el decimal ó se llegue á la última especie.*

La operación se dispone del modo siguiente.

Sea por ejemplo reducir 0,456 de legua á unidades de especie inferior.

$$\begin{array}{rl} 0,456 & \\ \times 60 & \text{cuadras} \\ \hline 27,360 & \text{cuadras} \\ \times 100 & \text{varas} \\ \hline 36,000 & \text{varas} \end{array}$$

De donde resulta que 0,456 de legua equivalen á 27 cuadras y 36 varas.

283. — **Reducción de un número incomplejo á unidades de especie superior.**

Redúzcase á unidades superiores el incomplejo 531 piés.

Un piè es igual á $\frac{1}{3}$ de vara, luego 531 piés equivaldrán á $531 \times \frac{1}{3}$ varas $= \frac{531}{3}$ de vara $= 177$ varas; de modo que, *para reducir un número incomplejo á unidades de especie superior, se divide el*

número dado por el número de veces que su unidad está contenida en la de la especie mayor.

Para reducir días á meses, se divide el número que expresa los días por 30; el cociente representará meses. Para reducir onzas á libras, se divide el número que expresa las onzas por 16: para reducir frascos á barriles, se divide el número que representa los frascos por 32; etc.

Si resulta que la división no da cociente exacto, el resto será evidentemente de la especie del dividendo; en este caso, el cociente más el resto formarán un número complejo equivalente al incomplejo dado.

Sea por ejemplo, reducir el incomplejo 14 arrobas á unidades de especie superior: tendremos.

$$14\ \text{@} = \frac{14}{4}\ \text{qq} = 3\ \text{qq}\ 2\ \text{@}.$$

El número 132 días equivale á 4 meses y 12 días.

Redúzcase el número incomplejo 1436 onzas á unidades superiores.

1436	16	
156	89 *libras*	25
onzas 12	14 »	3 *arrobas*

Luego 1436 onzas equivalen á 3@ 14 libras y 12 onzas.

Otro ejemplo: sea reducir 134578 pulgadas á unidades superiores.

134578	12		
14	11214	3	
25	22	3738	100
17	11	738	37 *cuadras*
58	24	*varas* 38	
pulgadas 10	*piés* 0		

Luego 134578 pulgadas equivalen á 37 cuadras, 38 varas y 10 pulgadas.

Cuando el número incomplejo que se quiere reducir á unidades superiores da por resultado otro número que á su vez contiene unidades superiores á las que representa, se procede como se ha visto en los dos últimos ejemplos, por cuyo medio, se trasforma un número incomplejo de especie inferior en complejo, para lo cual, se reduce el número propuesto á la especie inmediata superior y el residuo será el número de la especie inferior del complejo que se busca. Enseguida se reduce el cociente entero que se haya obtenido, á la especie superior siguiente, y el residuo expresará las unidades de especie inmediata á las inferiores del complejo, y se continúa de este modo hasta que el cociente entero no tenga unidades superiores.

Sea reducir á complejo el número incomplejo 86314 cuartas.

86314	4		
6	21578 frascos	32	
23	237	674 barriles	6
31	138	07	112 pipas
34	10 frascos	14	
2 cuartas		2 barriles	

Luego, 86314 cuartas equivalen á 112 pipas, 2 barriles, 10 frascos y 2 cuartas.

284. REDUCCIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO Á INCOMPLEJO DE UNA ESPECIE DIFERENTE DE LA MENOR.

Sea reducir á libras el complejo 2@ 12 libras 8 onzas 6 adarmes.

```
   2                    1 lb.=16 onzas
  25                         ×16
------                  ----------
  50 libras                   96
 +12   »                      16
------                  ----------
  62 libras                  256 adarmes
 ×16
------
 372
 62
------
 992 onzas
  +8   »
------
1000 onzas
 ×16
------
16000 adarmes
+   6   »
------
16006 adarmes
```

Reduciendo el complejo á su menor especie, vemos que equivale á 16006 adarmes, y como la libra tiene 256 adarmes, tendremos que dividiendo los 16006 adarmes por 256, el cociente expresará las libras que contiene el número propuesto, luego resulta que 2@ 12 lb. 8 onz. 6 adar^s^. $=\dfrac{16006}{256}=\dfrac{8003}{128}$ de libra.

LECCIÓN XXVIII.

Adición de los números concretos.

285. En la adición de los números concretos se distinguen dos casos; 1°. *que los sumandos sean números incomplejos;* 2°. *que sean números complejos.*

1er. CASO. Sea sumar 8 libras, $13\frac{2}{5}$ libras, $22\frac{1}{8}$ libras y $7\frac{4}{9}$ libras.

$$
\begin{array}{rcr}
8 & & \\
13\frac{2}{5} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{144}{360} \\
22\frac{1}{8} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{45}{360} \\
7\frac{4}{9} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{160}{360} \\
\hline
50\frac{349}{360} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{349}{360}
\end{array}
$$

La suma se compone de 50 libras y $\frac{349}{360}$ de libra ó sean 50 libras, 15 onzas $8\frac{8}{45}$ adarmes (**280**).

2°. CASO. — Sea sumar 45 cuadras 36 varas y

2 piès, con 87 varas 1 piè y 8 puntos, con 92 cuadras 64 varas 7 líneas, con 10 pulgadas 9 líneas 11 puntos.

La operación se dispone escribiendo unos sumandos debajo de los otros de modo que las unidades de la misma especie de cada sumando se correspondan y se suman sucesivamente los números de la misma especie, principiando por los de especie inferior y si de estas sumas parciales resulta una ó más unidades de la especie inmediata superior, se guardan para sumarlas con los números de su especie y debajo se escriben las unidades inferiores que sobran. Asi:

45 cuadras	36 varas	2 piès	.....	......	....
	87 »	1 »	.....	......	8 pun^s.
92 »	64 »	.....	......	7 lín^s	....
			11 pulg^s.	9 »	11 pun^s.
138 cuadras	88 varas	1 piè	0 pulg^s.	5 lín^s.	7 pun^s.

Otro ejemplo: súmense

6 qq.,	3 @,	8 lb.,	6 onz.,	9 adar^s.	
9 »	2 »	14 »	7 »	$8\frac{3}{4}$ » ...	$\frac{18}{24}$
4 »	2 »	23 »	11 »	$6\frac{5}{12}$ » ...	$\frac{10}{24}$
12 »	1 »	19 »	8 »	$10\frac{7}{8}$ » ...	$\frac{21}{24}$
31 qq.,	8 @,	64 lb.,	32 onz.,	$35\frac{1}{24}$ ad^s. ..	$\frac{49}{24}$ ó sean

1 ton., 13 qq., 2 @ 16 lb., 2 onz., $3\frac{1}{24}$ adarmes

Se suman los adarmes como se ha dicho en el número **144**, al tratar de los números mixtos.

El segundo caso puede reducirse al primero, trasformando los números complejos en incomplejos de la misma especie, pero es preferible sumarlos en la forma que lo hemos hecho.

Sustracción de los números concretos

286. En la sustracción de los números concretos distinguiremos también dos casos; 1°. cuando los números dados son incomplejos: 2°. cuando son complejos.

1er. CASO. Para restar de un número incomplejo otro también incomplejo, se procede como si los dos números fuesen abstractos, la diferencia será siempre de la especie de los datos.

Si los números dados no son de la misma especie, se reducirá uno cualquiera á la especie del otro.

1°. Hállase la diferencia entre $14\frac{3}{5}$ cuadras y $9\frac{11}{13}$ cuadras.

$$
\begin{array}{rcccc}
14\frac{3}{5} & \ldots & 14\frac{39}{65} & \ldots & 13\frac{104}{65} \\
9\frac{11}{13} & \ldots & 9\frac{55}{65} & \ldots & 9\frac{55}{65} \\
\hline
4\frac{49}{65} & \ldots & & \ldots & 4\frac{49}{65}
\end{array}
$$

Ahora valuando el quebrado $\frac{49}{65}$ de cuadra, hallaremos que la diferencia $14\frac{3}{5}-9\frac{11}{13}$ es igual á 4 cuadras 75 varas 1 pié 1 pulgada y $10\frac{2}{13}$ líneas.

2°. Hallar la diferencia entre 3 arrobas y 14 libras.

Reduciendo las arrobas á libras tendremos que las 3@ equivaldrán á 75lb, ahora restando de 75, 14 obtendremos 61 lb que es la diferencia pedida.

También hallaremos la misma diferencia reduciendo el sustraendo 14 libras á arrobas, y haciendo enseguida la sustracción; así:

$$3-\frac{14}{25}=\frac{75}{25}-\frac{14}{25}=\frac{61}{25}\text{@}=61\text{ libras}$$

3°. ¿Que diferencia existe entre 15 cuadras y 763 metros?

Reduciendo el minuendo á metros	Reduciendo el sustraendo á cuadras
—	—
15 cds.$=15\times85^{m}9=1288^{m}5$	15
763	763 metros$=$ 8.88
Diferencia$=525^{m}5$	Dif. en cuadras$=$ 6.12

Y si se quiere con mas exactitud la diferencia en cuadras, procederemos así:

$$15 - \frac{7630}{859} = \frac{12885}{859} - \frac{7630}{859} = \frac{5255}{859} \text{ cuadras}$$

5255	859
10100	6 cdrs. 11 vrs. 2 piés 3 pulgs 3 lins. $4\frac{832}{859}$ punts.
1510	
651	
3	
1953	
235	
12	
470	
235	
2820	
243	
12	
486	
243	
2916	
339	
12	
678	
339	
4068	
832	

La diferencia expresada en cuadras y subdivisores de cuadra es igual á

6 cuad^s. 11 var^s. 2 piès 3 pulg^s. 3 lin^s. $4\frac{832}{859}$ pun^s.

2°. CASO. — Para restar un número complejo de otro también complejo, se restan todas las unidades del sustraendo de las de la misma especie del minuendo, empezando por las de especie inferior.

Si algun sustraendo parcial es mayor que el minuendo respectivo, se añade á este una unidad de la especie superior inmediata, añadiéndole otra de igual clase al sustraendo para que la diferencia no se altere (**54**).

1°. Hállese la diferencia entre 3 @ 8 lb. 9 onz. 12 adarm^s. y 15 lb. 12 onz. 8 adar^s.

3 @ 8 lb.	9 onz.	12 adar^s.	
15 »	12 »	8 »	
2 @ 17 lb.	13 onz.	4 adarmes	

Digo: de 12 adarmes restando 8 adarmes quedan 4 adarmes; de 9 onzas no se puede restar 12, añado á las 9 onz. una libra ó sean 16 onzas y 9 forman 25 de las que restando 12 quedan 13 onz. Añado ahora una libra al sustraendo parcial 15 libras y tendré 16, las que no pueden restarse de las 8 del minuendo por lo que le añadiré una arroba ó sean 25 libras y tendremos 33 libras, de las cuales restando 16 quede 17 libras; añado ahora 1 @ al sustraendo la que restada de las 3 del minuendo quedan 2 arrobas; de modo que. la diferencia entre los números dados es de 2 @ 17 lb. 13 onz. y 4 adar^s.

2°. Réstese de 2 millas 4 cuadras y 59 varas, el número 17 cuadras y 48 varas.

	2 millas	4 cuadras	59 varas
		17 »	48 »
Diferencia	1 milla	7 cuadras	11 varas

Al minuendo parcial 4 cuadras se le agrega una milla ó sean 20 cuadras para que sea posible la sustracción, y para que la diferencia no se altere, le añadimos una milla también al sustraendo.

3°. Sea restar 3 horas 24 minutos 15 segundos, de 12 horas

12h		
3h	24'	15"
8h	35'	45"

Los principiantes pueden hacer esta sustración con más facilidad, descomponiendo una unidad del minuendo en complejo de todas las especies del sustraendo, así;

11h	59'	60"
3h	24'	15"
8h	35'	45"

4°. De una pipa de vino se han vendido 2 barriles 8 frascos y 3 cuartas. ¿Cuánto vino queda en la pipa?

	5 barriles	31 frascos	4 cuartas
	2 »	8 »	3 »
Restan	3 barriles	23 frascos	1 cuarta.

5°. ¿Qué edad tiene hoy 12 de Diciembre de

1892 una persona que nació el día 21 de Setiembre de 1853?

Tiempo trascurido desde Jesú-Cristo hasta hoy	1891	años	11	meses	12	días
Id. hasta el nacimiento..	1852	»	9	»	21	»
Edad.....	39	años	1	mes	21	días

287. Los problemas análogos á este último se resuelven restando el tiempo trascurrido desde el principio del siglo en que sucedió un hecho cualquiera,del tiempo trascurrido desde el principio del mismo siglo hasta el día en que se propone la cuestión.

Por ejemplo, propongamonos averiguar el tiempo que ha trascnrrido entre el descubrimiento de América por C. Colón y el día en que se proclamó la independencia de este pais.

424	años	7	meses	24	días
91	»	9	»	11	»
332	años	10	meses	13	días

332 años 10 meses 13 días es el tiempo que trascurrió.

LECCIÓN XXIX.

Multiplicación de los números concretos

288. En la multiplicación de números concretos se tomará por multiplicando el factor que es de la misma especie que el producto que se busca, por consiguiente el multiplicador tendrá que ser siempre considerado como abstracto: en efecto,

supongamos que el valor de una fanega de maiz es de 25 reales, y se quiere hallar el valar de 6 fanegas del mismo cereal; el multiplicando tendrá que ser necesariamente 25 reales porque es de la especie del producto que buscamos y el multiplicador, el número 6 considerado como abstracto, pues á nada nos conduciría multiplicar 25 reales por 6 fanegas de maiz, porque nada significa repetir 25 reales 6 fanegas veces ó 6 veces fanega; pero, multiplicando 25 reales por 6 obtendremos el valor de las 6 fanegas porque habremos repetido el valor de una fanega 6 veces.

Solamente ocurre en la geometria la resolución de problemas de multiplicación de números concretos en que el multiplicador no se considera abstracto.

Como por ejemplo, si los dos factores expresan medidas longitudinales el producto representará *unidades de superficie.*

Asi 25 metros ×10 metros es igual á 250 *metros cuadrados.*

Los factores pueden ser de diferente especie, uno puede representar *unidades superficiales* y el otro *unidades lineales*, en tal caso el producto representará *unidades cúbicas.*

Por ejemplo; 2,35 metros cuadrados × 1,04 metros lineales, es igual á 2,444 *metros cúbicos.*

Siendo tres los factores de una misma especie y expresando todos unidades longitudinales, el producto representará también *unidades cúbicas.*

Por ejemplo; 3 piés×2 piés×5 piès, será igual á 30 piés cúbicos.

Estos son los únicos casos que pueden ocurrir en la multiplicación de números concretos en que el multiplicador no se considera abstracto.

289. El problema general que con mas frecuencia se resuelve en la multiplicación de los números concretos es el siguiente:

Conocido el valor de una unidad, hallar él de un número cualquiera de unidades de la misma especie.

290. En la multiplicación de los números concretos se pueden distinguir cuatro casos: 1º. *multiplicar un número incomplejo por otro incomplejo:* 2º. *multiplicar un número complejo por un incomplejo:* 3º. *multiplicar un número incomplejo por un complejo:* 4º. *multiplicar un número complejo por otro complejo.*

1er. CASO — 1º. Cuanto importan 8 arrobas de arroz, costando cada una 22 reales?

Si una arroba cuesta 22 reales, 8 arrobas costarán 8 veces más; así pues, multiplicando 22 por 8, el producto 176 reales expresará el valor de las 8 arrobas.

Luego, *para multiplicar dos números incomplejos se* multiplican como si fuesen abstractos, y la especie del producto se determinará por las condiciones del problema.

2º. Hállase el valor de 15 piés cuadrados de terreno, costando la cuadra cuadrada 86457 pesos.

El multiplicando es 86457 pesos, porque es de la misma especie del producto que buscamos, pero el multiplicador no puede ser 15 porque multiplicando 86457 valor de una cuadra, por 15, ob tendríamos el valor de 15 cuadras cuadradas, en vez de 15 pies cuadrados que buscamos; asi pues, debemos empezar por reducir el multiplicador á cuadras (**283**), y como 15 pies cuadrados componen $\frac{15}{90000}$ cuadras cuadradas, la operación se

reduce ahora á multiplicar 86457 por $\frac{15}{90000}$ = 14,4095 pesos

3º. Una pipa de vino tinto cuesta 86 pesos, ¿cuanto costarán 9 hectólitros?

Un hectólitro es equivalente á 0,2196 de pipa, luego 9 hectólitros equivaldrán á 0,2196 multiplicado por 9 ó sea á 1,9764 pipas, asi pues, el precio de los 9 hectólitros se obtendrá multiplicando los 86 pesos por 1,9764.

$$\begin{array}{r} 1.9764 \\ 86 \\ \hline 118584 \\ 158112 \\ \hline 169,9704 \end{array}$$

Resultado; 169,9704 pesos.

En este último ejemplo aunque el multiplicando es 86 pesos, al ejecutar la operación lo hemos tomado por multiplicador para facilitar la multiplicación (**66**).

291. 2º. CASO — 1º. Hállase el peso de 115 fanegas de trigo, sabiendo que una fanega pesa 8 arrobas 15 libras y 6 onzas.

El multiplicando es 8 @ 15 lb 6 onz. y el multiplicador 115; ahora bien, sabiendo que una fanega tiene el peso expresado, el correspondiente á 115 fanegas será 115 veces mayor, luego haciendo 115 veces mayor cada una de las partes que componen el peso de una fanega, habremos resuelto el problema. Asi

8 @	15 lb	6 onz.
		×115
920 @	1725 lb.	690 onz.

ahora reduciendo las unidades inferiores que han resultado en los productos parciales, á unidades superiores, resultará que el peso de las 115 fanegas es de 990 @ 18 lb. 2 onz.

2°. — 15 carretillas emplearon 9 horas 27 minutos y 43 segundos en trasportar cierta cantidad de ladrillos desde un punto á otro. Para trasportar el mismo número de ladrillos una sola carretilla, ¿cuanto tiempo empleará?

Obsérvase que, en el supuesto de que todas las carretillas cargaron igual nùmero de ladrillos y emplearon el mismo tiempo en transportarlos, es evidente que una sola carretilla empleará 15 veces más tiempo, pues tendrá que hacer ella sola el trabajo de 15, luego el problema quedará re suelto hallando el producto de 9h 27' 43" por 15.

	9h	27'	43"
			15
	135h	405'	645" que equivalen
à	141h	55'	45"

3°. — Una locomotora recorre 14 leguas 25 cuadras y 76 varas en una hora, ¿que distancia recorrerá en 24 horas?

14	leguas	25	cuadras	76	varas
				24	
336	leguas	600	cuadras	1824	varas
346	leguas	18	cuadras	24	varas

4°. Si un frasco y $2\frac{1}{3}$ cuartas de vino valen 1 peso, ¿cuántos frascos se comprarán con 1475 pesos?

$$
\begin{array}{lrl}
 & 1 \text{ frasco} & 2\frac{1}{3} \text{ cuartas} \\
 & & \times 1475 \\
\hline
1475 \text{ frascos} & & 3441\frac{2}{3} \text{ cuartas} \\
1561 \text{ frascos} & & 1\frac{2}{3} \text{ cuartas}
\end{array}
$$

Se comprarán 1561 frascos $1\frac{2}{3}$ cuartas.

292. De los ejemplos precedentes se deduce que *para multiplicar un número complejo por otro incomplejo se multiplican todas las especies de unidades del multiplicando por el multiplicador, empezando por la especie inferior y si en algun producto parcial resultan unidades de la especie superior inmediata, se agregan al producto siguiente.*

Este segundo caso puede reducirse al primero trasformando el número complejo á incomplejo, y luego se procede como se ha indicado para aquel caso. Este procedimiento generalmente no se emplea sino cuando el incomplejo es fraccionario.

293. 3er. CASO. — Costando una cuadra cuadrada de terreno 8346 pesos, ¿cuánto costarán 5812 varas^2, 2 pies^2 y 9 pulgadas^2?

Reduciendo el multiplicador á incomplejo de cuadra resultará que

$$5812 \text{ varas}^2\ 2 \text{ piés}^2\ 9 \text{ pulgadas}^2 = \frac{7532640}{12960000} \text{ de}$$

$$\text{cuadra cuadrada} = \frac{5231}{9000} \text{ de cuadra cuadrada.}$$

Luego, el valor que buscamos se obtendrá multiplicando el precio de la cuadra por la fracción de cuadra que queremos hallar. Así:

$$8346 \times \frac{5231}{9000} = \frac{8346 \times 5231}{9000} = 4850{,}8806 \text{ pesos}$$

2º. Si en un dia se andan 32 kilómetros, ¿cuántas leguas se andarán en 8 dias, 6 horas y 17 minutos?

Reduciremos primeramente el multiplicador á incomplejo de dias y tendremos

$$8 \text{ dias } 6\text{h } 17' = \frac{11897}{1440} \text{ de día}$$

Ahora multiplicando los 32 kilómetros por el quebrado que representa los días que se emplearán en caminar, tendremos el número de kilómetros que se podrán recorrer en el tiempo expresado, los cuales se reducen después á leguas y quedará el problema resuelto

$$32 \times \frac{11897}{1440} = 264,3777$$ **kilómetros equivalentes á 51 leguas, 17 cuadras y 40 varas.**

También se podía haber reducido los 32 kilómetros á leguas y multiplicar ese número por el quebrado que representa los días, así:

32 kilómetros=6,208 de legua: luego tendremos que

$$6,208 \times \frac{11897}{1440} = 51,29$$ **leguas=51 leguas, 17 cuadras y 40 varas, cuyo resultado es idéntico al anterior.**

294. — **De los dos ejemplos precedentes se deduce que,** ***para multiplicar un número incomplejo, por un número complejo, se reduce el complejo á incomplejo y se multiplican como se ha explicado para el primer caso.***

295. 4º. CASO — Si una fanega de trigo pesa 8@ 9 libras 7 onz., cuanto pesarán 5 fanegas y 3 cuartillas?

Pesarán

$$(8 @\ 9\ lb.\ 7\ onz.) \times (5\ fanegas\ 3\ cuartillas) = \frac{3351}{400} @$$

$$\times \frac{23}{4} = \frac{77073}{1600} @ = 48 @\ 4\ lb.\ 4\ onz.\ 4\ adarmes.$$

Luego vemos que, ***para multiplicar un complejo por otro complejo, se reducen á incomplejos y se multiplican como estos.***

LECCIÓN XXX.

Multiplicación de los números concretos por el método de las partes alicuotas

296. Cuando un número divide exactamente á otro se dice que es *factor* ó *parte alicuota* de aquel número.

Así 5 es factor ó parte alicuota de 15; 6 lo es de 18, etc.

297. La multiplicación de los números concretos, cuando alguno de los factores es complejo, ó los dos, puede hacerse descomponiendo un factor en partes alicuotas las unas de las otras y hallando sucesivamente el valor de cada una de estas partes, empezando por hallar el de las unidades de especie superior. La suma será el valor pedido.

Multiplicación de un número incomplejo por un complejo.

1er. Ejemplo: averígüese el valor de 8 arrobas 16 lb. 6 onz. de un artículo que cuesta 25 reales la arroba.

La operación se dispone del modo siguiente.

$$\begin{array}{lr} & 25 \text{ reales} \\ & 8 \text{ @ } 16 \text{ lb. } 6 \text{ onz.} \\ \hline 8 \text{ @} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = & 200 \text{ reales} \\ 5 \text{ lb.} = \frac{1}{5} \text{ @} \ldots\ldots\ldots\ldots = & 5 \text{ »} \\ 10 \text{ »} = 2 \times 5 \text{ lb.} \ldots\ldots\ldots = & 10 \text{ »} \\ 1 \text{ »} = \frac{1}{5} \text{ de } 5 \text{ »} \ldots\ldots\ldots = & 1 \text{ »} \\ 4 \text{ onz.} = \frac{1}{4} \text{ lb.} \ldots\ldots\ldots\ldots = & 0{,}25 \text{ »} \\ 2 \text{ onz.} = \frac{4}{2} \text{ onz.} = \ldots\ldots\ldots = & 0{,}125 \text{ »} \\ \hline \text{Resultado} = & 216{,}375 \text{ reales} \end{array}$$

Para hallar el valor de 8 @, multiplico 25 reales que es el precio de una arroba por 8, y el producto parcial 200 reales será su valor.

Ahora para hallar el valor de las 16 libras, se discurre de este modo; si en lugar de tener 16 libras tuvieramos solamente 5 libras, valdrian la quinta parte de lo que cuesta una arroba, es decir que el valor de 5 lb es $\frac{1}{5}$ de 25 reales, ó sean 5 reales que escribo debajo de los 200 que importan las 8 @.

Conocido el valor de 5 lb. facilmente hallaré el de 10 lb. que es el doble del primero ó sean 10 reales; así como 1 lb, valdrá la quinta parte

de lo que cuestan 5 lb, es decir, 1 real, cuyo valor escribo unos debajo de otros para sumarlos luego.

Ya hemos hallado el valor de 5+10+1 libras ó sean de las 16 que tenemos en el multiplicador; ahora para hallar el valor de las 6 onzas, calcularemos primeramente el valor de 4 onz. ó sea de $\frac{1}{4}$ de lb., y vemos que es igual á 0,25 reales, y luego el 2 de onzas, que es la mitad de este último valor hallado, ó sean 0,125 rls.

Sumando todos los valores hallados resulta que, las 8 @, 16 lb., 6 onzas, á razón de 25 reales la @, importan 216,375 reales.

2º. Vamos ahora á resolver por este método el 2º. problema del número **293.**

2º. Si en un día se andan 32 kilómetros, ¿cuántas leguas se andarán en 8 días, 6 horas y 17 minutos?

	32 8 días 6 horas 17 minutos	
Producto por 8	256,	*kilómetros*
6h. = $\frac{1}{4}$ día.	8,	»
1h. = $\frac{1}{6}$ *de 8 Km* .	*1,333*	(valor auxiliar)
10m.= $\frac{1}{6}$ de hora. . . .	0,222	*kilómetros*
6m. = $\frac{2}{10}$ de hora. . . .	0,133	»
1m. = $\frac{1}{6}$ de 6 m. . . .	0,022	»
	264,377	*kilómetros*

que es exactamente el valor que hallamos por el otro método, faltando solo reducir los kilómetros á leguas, como se hizo en el número **293**.

En la resolución de este último problema nos ha convenido hallar el valor auxiliar de 1 hora, para deducir luego con facilidad el valor de los 17 minutos, después de lo cual se tacha dicho valor para que no sirva de confusión al practicar la suma total.

3°. ¿Cuánto importan $8\frac{3}{4}$ pipas de vino, costando cada pipa 92 pesos?

			92	pesos
			$8\frac{3}{4}$	
Valor de 8	pipas	=	736	pesos
Valor de $\frac{1}{4}$	de »	=	23	»
Valor de $\frac{2}{4}$	de »	=	46	»
	Resultado	=	805	pesos

298. Del procedimiento seguido en estos últimos ejemplos, se deduce que:

Para multiplicar un número incomplejo por otro complejo, se multiplican las unidades de especie superior del multiplicador por el multiplicando; las de especie inferior se descomponen en PARTES ALÍCUOTAS *de la unidad de especie superior, ó de otra cuyo valor sea ya conocido, y se toman iguales partes alícuotas del multiplicando ó de dichos valores conocidos. La suma de todos los valores así hallados, (omitiendo los auxiliares) será el producto total.*

Multiplicación de un complejo por un incomplejo

299. 1°. Averigüese cuanto pesarán 4 barriles de vino, sabiendo que una pipa pesa 45 @ 13 lb. y 9 onz.

		45 @, 13 lb., 9 onz.
		4
3 barriles	= ½ pipa	= 22 @, 19 lb., 4 onz., 8 adar.
1 barril	= ⅓ de 3 bar.	= 7 », 14 », 12 », 2⅔ »
	Resultado	= 30 @, 9 lb., 0 onz., 10⅔ ad^s.

2°. 15 carretillas emplearon 9 horas, 27 minutos y 43 segundos en trasportar cierta cantidad de ladrillos de un punto á otro. ¿Para trasportar el mismo número de ladrillos una sola carretilla, cuanto tiempo empleará?

		9 h., 27', 43"			
		15			
Producto por	9h. =	135 horas			
»	» 20' =	5 »	(*igual á ⅓ de hora*)		
»	» 5' =	1 »	15'		
»	» 1' =		15'		
»	» 1' =		15'		
»	» 30" =		7'	30"	
»	» 10" =		2'	30"	
»	» 1" =			15"	
»	» 2" =			30"	
Resultado		141 horas,	55'	45"	

300. Del procedimiento empleado en la resolución de los dos últimos problemas, se deduce la regla siguiente:

Para multiplicar un número complejo por otro incomplejo, se multiplican las unidades de especie superior del multiplicando por el multiplicador; las de especie inferior se descomponen en partes alicuotas de la unidad de especie superior ó de otra cuyo valor sea conocido, y se toman iguales partes alicuotas del multiplicador ó de la unidad cuyo valor sea ya conocido. La suma de todos estos valores (omitiendo los auxiliares) será el producto total.

Multiplicación de un complejo por otro complejo

301. 1°. Hállese el peso de 5 fanegas y 3 cuartillas de trigo, en el supuesto de que una fanega pesa 8 @, 9 lb. y 7 onzas.

Se determinará, primeramente, el peso de las 5 fanegas, para lo cual multiplicaremos todo el multiplicando por 5, como se ha hecho en los ejemplos anteriores, y luego hallaremos el peso de las 3 cuartillas, descomponiéndolas en 2 cuartillas, ó sea media fanega, y en 1 cuartilla, cuyos valores hallaremos tomando ½ de 8 @, 9 lb., 7 onzas, que es lo que pesa una fanega, y después tomando la mitad del valor que resulte para la ½ fanega tendremos el valor de 1 cuartilla.

La operación se dispone del modo siguiente:

			8 @,	9 lb.,	7 onzas	
			5 fanegas,	3 cuartillas		
Peso de las 5 fanegas	Producto por 8 @	=	40 @			
	—por 5 lb. = $\frac{1}{5}$ @	=	1 »			
	— » 1 »	=		5 lb.		
	— » 3 »	=		15 »		
	— » 4 onz. = $\frac{1}{4}$ lb.	=		1 »	4 onz.	
	— » 1 »	=			5 »	
	— » 2 »	=			10 »	
Valor de 2 cuartillas		=	4 »	4 »	11 »	8 adr^s.
» » 1 »		=	2 »	2 »	5 »	12 »
	Resultado	=	48 @,	4 lb.,	4 onz.,	4 adr^s.

2°. Una locomotora recorre en una hora 18 leguas, 8 cuadras, 15 varas, 2 piés y 9 pulgadas.—conservando siempre igual velocidad, ¿cuánto andará en 15 horas, 25', 35''?

En una hora 18 legs., 8 cuad., 15 varas, 2 piès, 9 pulg.
15 h. 25' 35"

Espacio recorrido en 15 horas

Producto por	18 leg.		= 270 leg.							
—por	6 cuad.	$=\frac{1}{10}$ »	=	1 »	30 cd.					
— »	2 »		=		30 »					
— »	1 »		=		*15* » (*auxiliar*)					
— »	10 vars.	$=\frac{1}{10}$ cd.	=		1 »	50 v^{s}.				
— »	5 »		=			75 »				
— »	1 »		=			*15* » (*auxiliar*)				
— »	1 piè	$=\frac{1}{3}$ v^{s}.	=			5 »				
— »	1 »		=			5 »				
— »	6 pulg.	$=\frac{1}{2}$ piè	=			2 »	1 p.	6 pulg.		
— »	3 »		=			1 »	0 »	9		
Valor de 20'	$=\frac{1}{3}$ de hora		=	6 »	2 »	71 »	2 »	11 »		
» » 5'	$=\frac{1}{4}$ de 20'		=	1 »	30 »	67 »	2 »	16 »		
» » 1'	$=\frac{1}{5}$ de 5'		=	»	*8* »	*13* »	*1* »	*10* »		
» » 30"	$=\frac{1}{2}$ de 1'		=		9 »	6 »	2 »	5 »		
» » 5"	=				1 »	51 »	0 »	5 »		

Resultado = 279 leg., 46 cd., 51 vs., 1 p., 7 pulg.

3°. ¿Cuánto importan $20\frac{3}{7}$ cuadras cuadradas de terreno, á razón de $18\frac{4}{5}$ pesos la cuadra cuadrada?

Una cuadra vale $18\frac{4}{5}$ pesos

$20\frac{3}{7}$

Valor de las 20 cuadras	Producto por \$ 18 =	360	pesos
	— por $\frac{1}{5}$ de peso =	4	»
	— » $\frac{3}{5}$ » » =	12	»
Valor de $\frac{1}{7}$ de cuadra =		$2\frac{24}{35}$	»
» » $\frac{2}{7}$ » »		$\frac{48}{35}$	»

Resultado $384\frac{2}{35}$ pesos

302. Del procedimiento observado en estos últimos ejemplos, se infiere que:

Para multiplicar un número complejo ó incomplejo por otro complejo, se multiplica todo el multiplicando por las unidades de especie superior del multiplicador, como se explicó en los problemas de los números anteriores; las unidades de especie inferior se descomponen en partes alicuotas de la unidad de especie superior, ó de otro cuyo valor sea conocido, y se toman iguales partes alicuotas del valor de la unidad de especie superior ó de la otra de valor conocido. La suma de todos estos valores parciales (omitiendo los auxiliares) será el producto total.

LECCIÓN XXXI

División de los números concretos

303. En la división de los números concretos se distinguen dos casos: 1°. *dividir* un número complejo por otro incomplejo. 2°. *dividir* un número complejo ó incomplejo por otro complejo.

304. 1er. Caso.- Problema 1°. Tenemos 45 @, 12 lb., 9 onzas de carne para repartir entre 49 pobres, ¿cuánto les toca á cada uno?

```
45 @, 12 lb., 9 onzas | 64
25                    |______________________________
———                   | 17 lb., 12 onzas, 6 1/4 adars.
225
90
————
1125 lb.
  12 »
————
1137 lb.
 497 »
  49 »
  16
————
 294
 49
————
 784 onz.
   9 »
————
 793 onz.
 153 »
  25 »
  16
————
 150
 25
————
 400
  16   1
 ———  ===
  64   4
```

Explicación. Para repartir la cantidad de carne expresada, empezaremos por distribuir las arrobas que tenemos; pero como no son más que 45, no alcanzan para entregar una arroba á cada pobre. Así, pues, reducimos las arrobas á libras, multiplicándolas por 25, y nos dan 1125, más 12 que tenemos en el dividendo, forman 1137 lb., las cuales repartidas entre 64 les toca á cada uno 17 lb., y sobran 49 que se reducen á onzas para poderlas repartir, para lo cual las multiplicamos por 16, y producen 784 onzas, más 9 que tenemos en el dividendo, forman 763 onzas, que repartidas entre 64 les toca á cada uno 12, y sobran 25 onzas, equivalentes á 400 adarmes, los que repartidos entre 64 les corresponde á cada uno 6 $\frac{1}{4}$ adarmes; luego hay que entregar á cada pobre 17 lb., 12 onzas, 6 $\frac{1}{4}$ adarmes.

2°. Si un móvil recorre en 12 minutos, con movimiento uniforme, una distancia de 3 leguas, 25 cuadras, 2 piés y 4 pulgadas, ¿qué distancia recorre por minuto?

3 leg. 25 cds. 2 ps. 4 pls.	12
60	17 cdˢ., 8 vˢ., 1 p., $2\frac{1}{3}$ pulg.
180 *cuadras*	
25 »	
205 *cuadras*	
85 »	
100 *varas*	
4 »	
3	
12 *piés*	
2 »	
14 *piés*	
2 »	
12	
24 *pulgadas*	
4 »	
28 *pulgadas*	
$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ »	

305. Del procedimiento seguido en los dos ejemplos anteriores, se deduce que

Para dividir un número complejo por otro incomplejo (de distinta naturaleza) se dividen las diferentes especies de unidades del dividendo por el divisor; empezando por las de especie superior, y sucesivamente se van dividiendo las siguientes, y si en alguna division parcial resulta residuo, se reduce á la especie inmediata inferior y se suma con las unidades que de esta especie haya en el dividendo, cuya suma formará el dividendo parcial siguiente.

OTRO EJEMPLO

3°. Una carretilla empleó 141 horas, 55' 45" en trasportar cierta cantidad de ladrillos de un punto á otro. Para trasportar el mismo número de ladrillos 15 carretillas, ¿cuánto tiempo emplearán?

```
141h 55' 45'  | 15
  6           |____________
 60           | 9 h, 27', 43"
____          |
360'          |
 55'          |
____
415'
115'
 10'
 60"
____
600"
 45"
____
645"
 45"
  0
```

306. 2°. CASO.—Problema 1°. 24 fanegas y 3 cuartillas de trigo pesaron 214 @, 17 lb., 6 onzas, ¿cuánto pesa la fanega?

Reduciendo el divisor á incomplejo de fanega se convierte en $\frac{99}{4}$ fanegas: lo que pesa una fanega se hallará dividiendo las 214 @, 17 lb., 6 onzas por $\frac{99}{4}$, es decir, dividiendo lo que pesan las fanegas dadas por el número de ellas.

Para ejecutar esta división se multiplica todo el dividendo por el denominador 4, y ese producto se divide por el numerador 99 (**161**). Así pues tendremos: (214 @, 17 lb., 6 onz.) × 4: 99 ó sea

Dividendo	Divisor / Cociente
856 @ 68 lb. 24 onz.	99
64	8 @ 16 lb. 13 onz. $13\frac{1}{11}$ ada.
25	
320	
128	
1600 *lb.*	
68 »	
1668 *lb.*	
678 »	
84 »	
16	
504	
84	
1344 onz.	
24 »	
1368 onz.	
378 »	
81 »	
16	
486	
81	
1296 adarmes	
306 »	
$\frac{9}{99} = \frac{1}{11}$ »	

2º. Una cuadra cuadrada de terreno costó 25 pesos y 6 reales, ¿cuántas cuadras cuadradas podrán comprarse con 17413 pesos y 4 reales?

Es evidente que se podrán comprar tantas cuadras cuadradas como veces 25 pesos y 6 reales esté contenido en 17413 pesos y 4 reales, luego este último número es el dividendo, el precio de la cuadra el divisor, y el cociente representará cuadras cuadradas de terreno y fracciones de cuadra si no es exacto.

Convirtiendo el dividendo y el divisor á reales, la operación se reducirá á dividir 174134 por 256: Así:

174134	256
2053	680 cuads^2. 2109 vrs^2. 3 piés^2 54 pulgs^2.
54	
10000	
540000	
280	
2400	
96	
9	
864	
96	
144	
864	
1296	
13824	
1024	
000	

Resultado: que pueden comprarse 680 cuadras cuadradas, 2109 varas cuadradas, 3 piés cuadrados y 54 pulgadas cuadradas.

3º. Se ha contratado la escavación de un pozo, á razón de 2 pesos 15 centésimos la vara cúbica de tierra que se saque de él: al fin resulta que hay que pagar 836 pesos con 7 reales ¿Cuántas varas cúbicas de tierrra se han sacado del pozo?

Reduciendo á incomplejo el dividendo y divisor, la cuestión quedará reducida á dividir 83670 por 215; el conciente serán varas cúbicas y fracciones de vara.

83670	215
1917	389 vs.s 4 p.s 56 pulg.s 133 $\frac{41}{43}$ líns.s
1970	
35	
27	
245	
70	
945	
85	
144	
340	
340	
85	
12240	
1490	
200	
144	
28800	
730	
850	
205	
215	

$$\frac{205}{215} = \frac{41}{43}$$

Resulta que del pozó se han extraído 389 vs.s, 4 p.s, 56 pulg.s $133\frac{41}{43}$ lín.s

El procedimiento seguido en la resolución de los tres problemas últimos nos indica què, *para dividir un número complejo por otro complejo, se reducen á incomplejos, y despuès se dividen como estos.*

APÉNDICE

LECCIÓN XXXII

Números primos

307. Ya se ha dicho en el número **130,** que se llama número primo, el entero que solo es divisible por sí mismo y por la unidad.

Se llama *número compuesto,* el número que es divisible exactamente por otro mayor que la unidad y menor que sí mismo.

308. Teorema. *Todo número que dividido sucesivamente por los primos 2, 3, 5, 7, 11, 13..... .. se llega, sin obtener cociente exacto, á un cociente entero menor que el divisor, es primo.*

Sea por ejemplo, el número 139, el cual según las reglas explicadas en la *Lección XI,* no es divisible por los primos 2, 3, 5 ni 11; que tampoco es divisible por 7; y al dividirlo por 13, nos da 10 de

cociente entero, número menor que el divisor, luego digo, que ya podemos asegurar que dicho número es primo; pues, si en alguna de las divisiones del número propuesto por los primos mayores que 13 obtuviéramos cociente exacto, como es evidente que estos cocientes irán disminuyendo á medida que aumente el divisor (**108** cons. 2), resultaría que si una de estas divisiones fuese exacta, el dividendo 139 sería igual á ese divisor multiplicado por el cociente (**83**), luego tendría también por factor á un número menor que 13, lo que es absurdo, pues hemos visto que ningún número menor que 13 le divide exactamente.

El raciocinio que acabamos de hacer, puede aplicarse á cualquier número, así pues, *para averiguar si un número es ó no primo, se divide sucesivamente por los primos* 2, 3, 5, 7, 11, 13, *etc.*; *y si se llega sin hallar cociente exacto y sin omitir divisor alguno, á un cociente entero menor que el divisor, el número propuesto será primo. En caso contrario no lo será.*

Construcción de una tabla de números primos

309. Para construir una tabla de números primos, se escriben todos los números enteros desde 1 hasta el límite que se quiera, borrándose enseguida los múltiplos de 2, luego los de 3, después los de 5, los de 7, los de 11, los de 13 y así sucesivamente: al fin, los números que no estén borrados formarán la tabla pedida. (1)

La tabla que va á continuación contiene los números primos comprendidos entre 1 y 1039.

(1) Este sencillo procedimiento se llama CRIBA DE ERATÓSTENES y es debido al antiguo matemático de este nombre.

Tabla de números primos

1	79	193	317	457	601	743	887
2	83	197	331	461	607	751	907
3	89	199	337	463	613	757	911
5	97	211	347	467	617	761	919
7	101	223	349	479	619	769	929
11	103	227	353	487	631	773	937
13	107	229	359	491	641	787	941
17	109	233	367	499	643	797	947
19	113	239	373	503	647	809	953
23	127	241	379	509	653	811	967
29	131	251	383	521	659	821	971
31	137	257	389	523	661	823	977
37	139	263	397	541	673	827	983
41	149	269	401	547	677	829	991
43	151	271	409	557	683	839	997
47	157	277	419	563	691	853	1009
53	163	281	421	569	701	857	1013
57	167	283	431	571	709	859	1019
61	173	293	433	577	719	863	1021
67	179	307	439	587	727	877	1031
71	181	311	443	593	733	881	1033
73	191	313	449	599	739	883	1039

En la práctica se escriben solo los números impares y además el 2, por ser número primo, tachándose enseguida los múltiplos de 3 empezando por su cuadrado 9 y prosiguiendo tachando el tercero de cada tres consecutivos á dicho número.

Es evidente que al tachar los múltiplos de un número primo cualquiera, debe empezarse por tachar el cuadrado de dicho número, pues los múltiplos anteriores deben estar ya tachados por ser

múltiplos también de los otros números primos menores.

Suprimidos los múltiplos de 3, se prosigue tachando los múltiplos de 5 empezando por el 25 y siguiendo tachando el quinto de cada cinco de los consecutivos: luego se tacha el 49 y el séptimo de cada siete de los siguiente: después el 121 y el undécimo de cada once de los siguientes y asi sucesivamente.

Descomposición de un número compuesto en factores primos

310. TEOREMA.—*Todo número compuesto, es un producto de números primos.*

Sea por ejemplo el número 210, el cual desde luego observamos que es divisible por 2 (**133**), luego tendremos que:

$$210 = 2 \times 105$$

El factor 105 vemos que es divisible por 3 (**134**), luego:

$$210 = 2 \times 3 \times 35$$

El factor 35 es divisible por 5 (**133**), luego resulta por fin que:

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

y como todos estos factores son primos, el teorema queda demostrado.

311. Descomponer un número en sus factores primos, es hallar los números primos que multiplicados entre sí formen el número propuesto.

Luego, para descomponer un número en sus factores primos se procederá como en la anterior demostración, dividiendo el número dado y los cocientes que resulten por los divisores primos menores, hasta obtener un cociente igual á 1. Estos divisores serán los factores primos pedidos.

Para mayor facilidad la operación se dispone del siguiente modo:

2100	2		2574	2
1050	2		1287	3
525	3		429	3
175	5		143	11
35	5		13	13
7	7		1	
1				

Luego, los factores primos del número 2100 son: 2, 2, 3, 5, 5, y 7, ó bien:

$$2100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$

Los factores primos del número 2574 son: 2, 3, 3, 11 y 13, es decir, que:

$$2574 = 2 \times 3^2 \times 11 \times 13$$

LECCIÓN XXXIII

Máximo común divisor de dos ó más números enteros.

312. Se llama *máximo común divisor* de dos ó más números, el mayor número divisor de todos ellos.

Máximo común divisor se escribe abreviadamente, así: *m. c. d.*

El m. c. d. de 15 y 35 es 5; el de 9, 36, 45 y 63 es 9.

El m. c. d. de dos ó más números no puede ser mayor que el menor de ellos.

313. Teorema.- *Si un número divide exactamente á otros dos, dividirá también á su diferencia.*

En efecto, siendo 6 divisor de 42 y 18, también lo será de 42—18; porque

42 = 7 veces 6
18 = 3 veces 6

y restando ordenadamente estas igualdades, tendremos:

42—18=7 veces 6—3 veces 6

pero 7 veces 6,—3 veces 6, es igual á

(7—3)×6 (**69** nota), luego,

$$42-18 = (7-3) \times 6$$

De donde observamos que la diferencia se compone de un múltiplo de 6, por consiguiente es divisible por 6.

Corolario. *Todo número que divide exactamente al dividendo y al divisor de una division inexacta, divide también al residuo; y recíprocamente, todo número que divida exactamente al divisor y residuo dividirá también al dividendo.*

Sea por ejemplo, 77 el dividendo y 21 el divisor; el cociente entero es 3 y el residuo 14: y vamos á demostrar que todo divisor de 77 y 21 lo es

también de 14, y que todo divisor de 14 y 21 lo es también de 77.

En efecto: sabemos que en toda división inexacta, el resíduo es la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente, luego

$$77 - 21 \times 3 = 14$$

Todo divisor de 77 y 21 lo es también de 21 × 3 (**132** cons.), luego también lo será de la diferencia entre 77 y 21 × 3, ó sea del resíduo 14.

En toda división inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo, así pues, tendremos

$$77 = 21 \times 3 + 14$$

Todo divisor de 21 y 14 hemos dicho que lo es de 21 × 3, luego también lo será de 77 que es la suma de 21 × 3 y 14 (**132**).

314. TEOREMA.—*El máximo común divisor de dos números es igual al máximo común divisor del menor y del residuo que resulte de dividir el mayor por el menor.*

Sean los números 77 y 21 y digo que el m. c. d. de 77 y 21 es igual al m. c. d. de 21 y 14.

En efecto, el m. c. d. de 77 y 21 divide también al residuo 14 de la división de estos números, luego no puede ser mayor que el m. c. d. de 14 y 21.

Pero el m. c. d. de 14 y 21 divide también á 77, luego no puede ser mayor que el m. c. d. de 77 y 21.

De donde se deduce que no pudiendo ser el m. c. d. de 77 y 21 mayor que el m. c. d. de

14 y 21, ni este mayor que aquel, han de ser iguales, que es lo que queríamos demostrar

315. Propongámos ahora hallar el máximo común divisor de 77 y 21.

El m. c. d. que queremos determinar no puede ser mayor que 21 pues debe dividir á este número, luego si 21 dividiese exactamente á 77 este sería el m. c. d. que se pide. Divídase pues, 77 por 21 y se obtendrá 3 de cociente entero y 14 de residuo lo que nos prueba que 21 no es el m. c. d. que buscamos. Pero sábese que el m. c. d. de dividendo y divisor es igual al m. c. d. de divisor y residuo, luego el problema se reduce ahora á hallar el m. c. d. de 21 y 14, y haciendo el mismo raciocinio que hemos hecho con los números 77 y 21 diremos:

El m. c. d. de 21 y 14 no puede ser mayor que 14, luego si 14 dividese exactamente à 21 este sería el m. c. d. que buscamos. Divido pues 21 por 14 y se obtiene 1 de cociente entero y 7 de residuo lo qne nos prueba que 14 no es el m. c. d. de 21 y 14.

Pero, el m. c. d. de 21 y 14 es igual al m. c. d. de 14 y 7, así pues queda ahora reducido el problema á hallar el máximo común divisor de 14 y 7. Dividiendo 14 por 7 nos da 2 de cociente exacto, luego 7 es el m. c. d. de 14 y 7 y por consiguiente de 21 y 14 y el de 77 y 21 que se pide.

De este procediimiento se deduce la siguiente regla:

316. *Para hallar el máximo común divisor de dos números, se divide el mayor por el menor; y si se obtiene cociente exacto, el menor será el* m. c. d. *de ambos. Pero si queda residuo, se dividirá el número menor por el residuo, este por el segundo residuo y asi sucesivamente hasta hallar cociente exacto, en cuyo caso el último divisor es el* m. c. d. *pedido.*

EJEMPLOS

1°. Hállase el m. c. d. de los números 48789 y 5994.

En la práctica se dispone la operación del siguiente modo.

	8	7	6	5
48789	5994	837	135	27
837	135	27	0	

2°. Hállase el m. c. d. de los números 8370 y 1998

	4	5	3	2
8370	1998	378	108	54
378	108	54	0	

3°. Hállase el m. c. d. de los números 3803 y 1609

	2	2	3	3	146
3803	1609	585	439	146	1
585	439	146	1	0	

Los cocientes se escriben encima de los divisores, los restos bajo sus respectivos dividendos y el último divisor es el m. c. d. pedido.

Así vemos que en el 1er. ejemplo el m. c. d. es 27; en el 2°. es 54 y en el 3°. es 1, lo que nos demuestra que los dos últimos números propuestos son primos entre sí.

317. TEOREMA.—*Si dos números se multiplican ó dividen exactamente por otro, su máximo*

común divisor quedará también multiplicado ó dividido por este otro.

Sean los números 210 y 36, cuyo m. c. d. es 6, y digo que, si multiplicamos los números propuestos por 4, por ejemplo, su máximo común divisor quedará multiplicado por 4, es decir que tendremos:

m. c. d. de 210×4 y $36 \times 4 = 6 \times 4$

En efecto, se ha demostrado en el número **106** que si se divide ó multiplica el dividendo y el divisor de una división inexacta, por un número entero cualquiera, el cociente entero no varía, pero el residuo queda dividido ó multiplicado por el mismo número, luego hallando el m. c. d. de los números dados tendremos:

	5	1	5
210	36	30	6
30	6	0	

y multiplicando los dos números propuestos por 4 resultará

	5	1	5
210×4	36×4	30×4	6 ¦ 4
30×4	6×4	0×4	

luego vemos que el m. c. d. de 210×4 y 36×4, es $6 . 4$, conforme con lo que queríamos demostrar.

De un modo análogo demostraríamos el caso de dividirse los dos números por un factor de ellos

CONSECUENCIA. Del teorema que acabamos de demostrar se deduce, que si dos números se dividen por su m. c. d. los cocientes serán primos entre sí.

En efecto: dividiendo dos números por su m. :. d. este quedará dividido por sí mismo, y da-á 1 de cociente, luego los cocientes que resulen de dividir dos números por su m. c. d. tenlrán por m. c. d. la unidad y por consiguiente ;erán primos entre sí.

318. TEOREMA.—*Todo número que divida xactamente á otros dos, divide también á su* m. :. d. y recíprocamente, *todo número que divida xactamente al* m. c. d. *de otras dos divide tamiién á estos números.*

Este teorema se deduce fácilmente de lo denostrado en el número **313** (Corolario).

319. PROBLEMA.—Hállese el máximo común livisor de los números 102, 170, 561 y 153.

Supongamos por un momento que es *A* el m. :. d. que se pide. En tal caso siendo *A* factor le 102 y 170 dividirá, según se ha demostrado á ;u m. c. d. que llamaremos *B*. Resulta ahora [ue *A* es factor de *B* y de 561 por consiguiente ambién lo será de su m. c. d. que llamaremos *C*. Tenemos pues que *A* es factor de *C* y de 153, uego lo será de su m. c. d. que llamaremos *D*,)or consiguiente *A* no podrá ser mayor que *D*.

Pero *D* divide á *C* y á 153 luego dividirá tam)ién á *B* y á 561 que son múltiplos de *C*.

Hemos visto también que *D* divide á *B*, 561 r 153, luego siendo *D* factor de *B* lo será tam)ién de 102 y 170 que son múltiplos de *B*, de londe resulta que *D* divide 102, 170, 561 y 153)or consiguiente no puede ser mayor que *A* que ;s el m. c d. de dichos números.

Resulta, pues, que *A* no puede ser mayor que *D* y que *D* tampoco puede ser mayor que *A*, luego $D=A$.

Siguiendo este procedimiento, fácil nos será hallar el valor del m. c. d. de los números propuestos. Así:

	1	1	2
170	102	68	34
68	34	0	

El m. c. d. de 102 y 170 es 34.

Ahora hallaremos el m. c. d. de 34 y el siguiente número 561.

	16	2
561	34	17
221		
17		

El m. c. d. de 561 y 34 es 17.

Ahora falta hallar el m. c. d. entre el último hallado y el número 153.

	9
153	17
0	

Vemos que también es 17; luego 17 es el m. c. d. de los números dados.

320. Del procedimiento seguido en el problema anterior, el cual es aplicable á cualquier otro caso, se deduce la siguiente regla:

Para hallar el m. c. d. de varios números, se busca el m. c. d. de dos cualesquiera de ellos, después el de este y otro de los números propuestos, y se continúa hallando el m. c. d. del último m. c. d.

encontrado y otro de los números restantes, hasta operarse con todos los números dados.

El último m. c. d. hallado será el pedido.

EJEMPLO

Hállase el m. c. d. de los números 630, 756 y 945.

	1	5
756	630	126
126	0	

El m. c. d. de 756 y 630 es 126.

	7	2
945	126	63
63	0	

El m. c. d. de 126 y 945 es 63, que es también el m. c. d. de los tres números propuestos.

LECCIÓN XXXIV

Mínimo común múltiplo

321. Se llama mínimo común múltiplo de varios números, el menor número que sea divisible por todos ellos.

Así, el mínimo común múltiplo de 30 y 40 es 120; el de 3, 15 y 12 es 60.

Mínimo común múltiplo se escribe abreviadamente así: m. c. m.

322. TEOREMA.— *Todo número que divida exactamente á un producto de dos factores y sea primo con uno de ellos, dividirá al otro.*

Dividiendo el número 7 al producto 28 . 15=420 y siendo primo con el factor 15 digo que dividirá al otro factor 28.

En efecto, siendo 15 y 7 primos el máximo común divisor de estos números será 1. Ahora multiplicando 15 y 7 por 28, el m. c. d. quedará también multiplicado por 28 (**317**), luego tendremos que el m. c. d. de 28 . 15 y 28 . 7 será 28 . 1=28 ahora el número 7 divide al producto 28 . 15 por hipótesis y al producto 28 . 7 por ser un múltiplo de 7, luego dividirá también al m. c. d. de estos productos que 28 (**318**).

CONSECUENCIA 1ª. *Si un número primo divide exactamnte á un producto de varios factores, dividirá por lo menos á uno de éstos.*

En efecto; si el número 5 divide al producto 8 . 13 . 25 y es primo con el factor 8, dividirá al otro factor 31 . 25.

Siendo el factor 13 . 25 divisible por 5 y este primo con 13, tendrá que dividir á 25.

Consecuencia 2ª. *Si un número es divisible exactamente por otros dos ó más primos entre si, es divisible por el producto de todos ellos.*

Sea el número 924 que es divisible por 2, por 3 y por 11 y digo que también lo será por el producto 2 . 3 . 11.

En efecto; 924 es divisible por 2, luego se tiene.

$$924=462 . 2$$

También 924 es divisible por 3, luego 462 . 2 lo será del mismo modo, pero 3 es primo con el fac-

tor 2, luego dividirá al otro factor 462 y tendremos:

$$462=154 . 3$$

ó bien

$$924=154 . 3 . 2$$

Por fin, también el número 11 divide á 924, luego igualmente dividirá al producto 154 . 3 . 2; pero 11 es primo con los factores 3 y 2, por consiguiente dividirá al otro factor 154 y tendremos por último

$$924=14 . 11 . 3 . 2$$

Es decir, que 924 es igual á 14 veces el producto 2 . 3 . 11, luego es divisible por este producto.

323. TEOREMA. *Un número no admite más que una sola descomposición en factores simples.*

En efecto: supongamos por un momento que el número 3465 admitiese dos descomposiciones distintas 3 . 3 . 5 . 7 . 11 y 3 . 3 . 5 . 17, en tal caso tendríamos que 3 . 3 . 5 . 7 . 11=3 . 3 . 5 . 17; según esta última descomposición el número 17 divide al producto 3465, luego dividirá también á uno de los factores 3, 5, 7 ú 11, lo que es imposible por que es primo con cada uno de ellos, luego la anterior igualdad es absurda.

Supongamos que la diferencia consista en la repetición de alguno de sus factores, por ejemplo que fuese, 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 11, en tal caso tendríamos que 3 . 3 . 5 . 7 . 11=3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 11; dividiendo los dos miembros de esta supuesta igualdad por 5, resultará

$$3 . 3 . 7 . 11=3 . 3 . 5 . 7 . 11;$$

donde se observa que el segundo miembro es visible por 5; luego el primero también lo ser luego el número 5 tendrá que dividir á uno los factores primos 3, 7 ú 11, lo que es a surdo.

CONSECUENCIA. *Un número no es divisible por otro, si no contiene todos los factores primos de este, repetidos cada uno al menos tantas veces como se hallen en este otro.*

Digo: que el número 84 que es igual á $2 . 2 . 3 . 7$ no puede ser divisible por 15 porque no contiene al factor 5 que tiene este último.

En efecto; si el número 84 fuese divisible por 15, que es igual á $3 . 5$, tendríamos

$$84 = 3 . 5 \times \text{cociente.}$$

Ahora, cualesquiera que sean los factores del cociente, el factor 5 no puede desaparecer al efectuar la multiplicación, luego el número 84 admitiría dos descomposiciones en factores primos lo que es absurdo.

324. Fundándonos en los principios que acabamos de demostrar, podremos determinar el mínimo común múltiplo de los números 715, 1386 y 37050.

Descompuestos estos números en sus factores primos resulta que

$$715 = 5 . 11 . 13$$

$$1386 = 2 . 3^2 . 7 . 11$$

$$37050 = 2 . 3 . 5^2 . 7^2 .$$

Por consiguiente un número será divisible por

715 conteniendo por lo menos los factores 5, 11 y 13: será divisible por 1386 si contiene á lo menos los factores 2, 3^2, 7 y 11: será divisible por 37050 si contiene por lo menos los factores 2, 3, 5^3 y 7: asi pues el número $2 . 3^2 . 5^3 . 7^2 . 11 . 13 = 15765750$ que se compone de las mayores potencias de los distintos factores simples que forman los números propuestos será múltiplo de dichos números, y digo que será el menor porque otro número que no contenga los factores $2 . 3^2 . 5^3 . 7^2 . 11$ 13 no será divisible á la vez por todos los números dados (**323** cons.), luego el número 15765750 es el menor de todos los múltiplos que pueden formarse de los números 715, 1386 y 37050.

De cuyo procedimiento se deduce la siguiente

REGLA. *Para hallar el mínimo común múltiplo de dos ó más números se multiplican entre sí las potencias mayores de los diferentes factores simples de todos ellos.*

FIN.

ÍNDICE

Operaciones fundamentales

LECCIÓN V

LECCIÓN VI

LECCIÓN VII

LECCION VIII

LECCIÓN IX

LECCIÓN X

LECCIÓN XI

LECCIÓN XXI

Números concretos

LECCIÓN XXII

Continuación del sistema métrico decimal de pesas y medidas

MEDIDAS SUPERFICIALES

Medidas de volumen

LECCIÓN XXVI

Medidas antiguas de la República Argentina

Sistemas de pesas y medidas de Inglaterra

Medidas inglesas comparadas con las del sistema métrico decimal

LECCIÓN XXVII

Cálculos de los números denominados

Apéndice

FIN

Erratas

Páginas	*lineas*	*Donde dice*	*Debe decir*
7	31	*seis cientos*	*seiscientos*
10	30	**21**	**23**
22	10	*pirmero*	*primero*
27	20	*snmando*	*sumando*
42	11	16830	96830
46	19	1er. CASO	**65.** 1er. CASO
47	24	74	84
48	23	111	110
49	1	**65**	**66**
49	21	**66**	**67**
50	20	**67**	**68**
57	9	cualquiera	cualesquiera
65	31	vnedió	vendió
101	14	*dividinedo*	*dividendo*
101	17	*bajado las*	*bajado todas las*

Páginas	*lineas*	*Donde dice*	*Debe decir*
109	14	embarho	embargo
155	13	$23\frac{61}{330}$	$33\frac{61}{330}$.
166	7	es lo queriamos	es lo que queríamos
167	13	$\frac{3}{4}6\times\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}\times 6\frac{5}{7}$
174	10	1°. $\frac{4}{9}=1\times\frac{9}{4}$	1: $\frac{4}{9}=1\times\frac{9}{4}$
176	10	$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$
182	8	cetésimas	centésimas
185	31	mayor que	mayor, ó sea cien veces mayor que
198	18	y 'artículos	y en artículos
204	1	$246\times\frac{1000}{24}\times\frac{246000}{24}$	$246\times\frac{1000}{24}=\frac{246000}{24}$
215	5	45379 45	45379—45
260	9	69	60
264	22	alados	salados
327	5	45'	45"
330	8	conciente	cociente